UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

Prima prova parziale del Corso di Matematica 1
Corsi di Laurea in S.E., S.F.A., S.P.R.S. e S.T.I.

Roma, 25 novembre 2005

Cognome: .... Nome: .... N. di matricola: ....

Anno di corso (primo, secondo, ecc.):.........................

Corso di Laurea: SE SFA SPRS STI

Risolvere per esteso i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i procedimenti seguíti e mettendo in evidenza ogni risposta.

1. (In questo esercizio si possono lasciare indicati i termini con il fattoriale.) Determinare il numero dei sottoinsiemi di 6 elementi dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi è $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Dunque il numero richiesto è

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

2. Siano D, E, F sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ e sia a_0 un numero reale. Fornire le definizioni relative alle seguenti affermazioni:
(1) E è aperto;
(2) F è chiuso;
(3) a_0 è punto di accumulazione di D.

E è aperto se ogni punto di E ha un intorno tutto contenuto in E.
F è chiuso se $\mathbb{R} \setminus F$ è aperto
a_0 è punto di accumulazione per D se ogni intorno di a_0 interseca D in almeno un punto diverso da a_0

3. Data la successione $a_n = 3 + \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3}$, per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

(1) dire se a_n è monotòna, ed eventualmente di che tipo;

(2) determinare $\inf a_n$ e $\sup a_n$, specificando se si tratta rispettivamente di massimo o minimo.

a_n è monotona decrescente (strettamente).

Infatti $a_n > a_{n+1}$ è equivalente a

$$\frac{2n^2+16n+7}{n^2(1+n^2)} > 0$$

che è evidentemente sempre verificata.

Pertanto $\max a_n = a_1 = 12$ e, dal teorema di regolarità delle successioni monotone,

$$\inf a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{2}{3} + \frac{7}{n^3}\right) = 3$$

Poiché $a_n = 3 + \frac{2}{n} + \frac{7}{n^3} > 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

la successione non ammette minimo

5. Calcolare:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$;

(2) $\lim_{x\to+\infty} x \sin \frac{x^3+x^2}{2x^4-5}$;

(3) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x^2-15x}{(x-3)^3}$.

1. Poiché $|\cos x| \leq 1 \ \forall x$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

2. $$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{x^3+x^2}{2x^4-5} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{x^3+x^2}{2x^4-5}}{\frac{x^3+x^2}{2x^4-5}} \cdot \frac{x^4+x^3}{2x^4-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+x^3}{2x^4-5} = \frac{1}{2}$$

(Si usa il fatto che se $f(x) \to 0$, $\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$).

3. $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x^2-15x}{(x-3)^3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)(x+5)}{(x-3)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x(x+5)}{(x-3)^2} = +\infty$$

4. Calcolare:

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-16n}{2-3n^2}$;

(2) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - e^n + n^n - n!)$;

(3) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+6}{n+3}\right)^{n+7}$;

(4) $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n-2}-\sqrt{n}) \sin e^n$.

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-16n}{2-3n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4-\frac{16}{n}}{-3+\frac{2}{n}} = -\frac{4}{3}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - e^n + n^n - n!) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^n \left(\frac{\sqrt{n}}{n^n} - \frac{e^n}{n^n} + 1 - \frac{n!}{n^n} \right) = +\infty$$

dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

3. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+6}{n+3}\right)^{n+7} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n+3}\right)^{n+7} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{3}}\right)^{\frac{n+3}{3}\cdot\frac{3(n+7)}{n+3}} = e^3$$ poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{3}}\right)^{\frac{n+3}{3}} = e, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+7)}{n+3} = 3$$

4. $$(\sqrt{n-2}-\sqrt{n}) \operatorname{sen} e^n = \frac{-2}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}} \operatorname{sen} e^n$$

Poiché $\operatorname{sen} e^n$ è limitata e $\frac{1}{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}$ è infinitesima il limite vale 0.