SOLUZIONI DELLA PROVA
SCRITTA DI GEOMETRIA (5–7–2001)

Esercizio 1 (a) Equazioni vettoriali per r, s sono:

$$r : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè i vettori $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (il determinante della matrice che ha tali vettori per righe è diverso da 0), le rette r ed s sono sghembe.

(b) La retta t può determinarsi come intersezione del piano π_1 passante per P e contenente s e del piano π_2 passante per P e perpendicolare ad r. Un'equazione vettoriale per π_1 è $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; eliminando v, u si ottiene per π_1 l'equazione cartesiana $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$. Come vettore normale per π_2 possiamo considerare un vettore direttore di r; imponendo poi il passaggio per P otteniamo $\pi_2 : x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0$. In definitiva si ha $t : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3 = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2 (a) Risulta:

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ F(t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Poichè $\det(A) = 2 \neq 0$, F risulta iniettiva; poichè $dim(V) = dim(W)$, dal teorema di "nullità più rango" possiamo dedurre che $dim(Im(F)) = dim(W)$; pertanto, dato che $Im(F) \subseteq W$, si ha $Im(F) = W$ e F è suriettiva, dunque un isomorfismo.

(c) Poichè $F(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e F è un isomorfismo, si ha necessariamente $F^{-1}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 1$.

(d) Il polinomio caratteristico di A è $(1-t)(t^2 - 5t + 2)$, che ha come radici $1, \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Dato che tali radici sono reali e distinte, A è diagonalizzabile.

Esercizio 3 Equazioni cartesiane per U, W si ottengono imponendo che un generico vettore $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sia linearmente dipendente da v_1, v_2 (rispettivamente v_3, v_4), ovvero che la matrice che ha per righe X, v_1, v_2 (rispettivamente X, v_3, v_4) abbia rango 2. Si ottiene:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Allora $U \cap W$ ha equazioni $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ e una base di soluzioni di questo sistema è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $U + W$ ha per base v_1, v_2, v_4; equazioni cartesiane per tale sottospazio sono $x_4 = 0$.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) Tenuto conto che l'elemento di posto (i, j) della matrice di g rispetto alla base canonica è il coefficiente di $x_i y_j$, si ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Il polinomio caratteristico di A è $t(1 - t)(2 - t)$, pertanto gli autovalori sono $0, 1, 2$, cosicchè $i_+(g) = 2$, $i_0(g) = 1$, $i_-(g) = 0$.

(c) Autovettori relativi a $2, 0, 1$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Tali vettori, essendo autovettori per l'operatore simmetrico L_A relativi a tre autovalori distinti, sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare standard). Normalizzandoli, otteniamo una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A, e la cercata matrice ortogonale N è la matrice che esprime i vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$