COMPITO DI GEOMETRIA DEL 5-7-2001

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si considerino le retta r, s di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 + 1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Verificare che r ed s sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta t passante per il punto P di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, perpendicolare ad r e incidente s.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e W lo spazio delle matrici reali simmetriche 2×2. Sia $F : V \to W$ l'applicazione lineare

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto a $\{1, t, t^2\}$ presa come base di partenza in V e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di arrivo in W.

(b) Stabilire, motivando la risposta, se F è un isomorfismo.

(c) Calcolare $F^{-1}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$.

(d) Stabilre, motivando la risposta, se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1, v_2 e W il sottospazio $\mathbb{R}^4$ generato da v_3, v_4.

(a) Determinare la dimensione e una base per $U \cap W$.

(b) Determinare la dimensione ed equazioni cartesiane per $U + W$.

Esercizio 4. (a) Si definiscano le nozioni di *autovalore, autovettore, molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.*

(b) Si provi che la molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.

Esercizio 5. Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

(a) Scrivere la matrice A di g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare gli indici di g.

(c) Determinare una matrice ortogonale N tale che N^tAN è diagonale.