Corso di laurea in Fisica. Prova di Geometria del 21-6-2013

Prof. Paolo Papi

NOME COGNOME

Lo svolgimento di ciascun esercizio deve essere giustificato. Non si possono utilizzare testi o dispense. Non scrivere nella parte sottostante. Risolvere tutti gli esercizi in due ore e mezzo. Convenzione notazionale: i vettori di $\mathbb{K}^n$ sono scritti per riga.

1.

2.

3.

4.

5.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Sia considerino i punti $A \equiv (0,1,1),\ B \equiv (1,-1,0), C \equiv (1,0,1)$.
a) Determinare un'equazione cartesiana del piano π passante per A, B, C.
b) Determinare il punto D, quarto vertice del parallelogramma P avente per lati i segmenti AB, AC.
c) Determinare l'area di P e la distanza di D dall'origine.

Esercizio 2. Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
a) Determinare la matrice rispetto alla base standard dell'operatore $T \in End(\mathbb{R}^3)$ per cui $T(w) = w \, \forall \, w \in W$ e $T((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$.
b) Determinare la matrice rispetto alla base standard dell'operatore $S \in End(\mathbb{R}^3)$ per cui $S((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$, W è un autospazio di S e S non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. a) Determinare le possibili forme di Jordan di una matrice il cui polinomio caratteristico è $(t-2)^2(t-3)^3$.
b) Una matrice quadrata A si dice nilpotente se $A^k = 0$ per qualche k. Dimostrare che se A è nilpotente allora 0 è l'unico autovalore di A. Dire, giustificando la risposta, se le matrici nilpotenti $n \times n$ formano un sottospazio vettoriale delle matrici $n \times n$.

Esercizio 4. Determinare la compatibilità e il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni del sistema lineare la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix}$$

al variare di $k \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Si considerino le matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se sono congruenti.
2. Determinare se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ per la forma bilineare simmetrica $g(X,Y) = XAY^t$.
3. Determinare se esiste, una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ per la forma bilineare simmetrica $g(X,Y) = XBY^t$.