ESAME DI GEOMETRIA DEL 30-1-2002

Esercizio 1. (a) Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si determinino equazioni cartesiane per la retta s passante per il punto P di coordinate $(1, 2, -1)$, perpendicolare alla retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ e parallela al piano di equazione $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$.

(b) Si dica se r e s sono sghembe o complanari.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 e $f : V \to V$ l'operatore lineare:

$$f(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a-c & b+a \\ b+a & b+c \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di f rispetto alla base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ assunta come base di partenza e di arrivo in V.

(b) Determinare basi per $Ker(f)$ e per $Im(f)$.

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x \\ ky + z \\ 3x + 2ky + 2z \end{pmatrix}$$

(k è un parametro reale). Determinare i valori di k per cui F è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n .

(a) Si definisca la nozione di *forma bilineare simmetrica* su V.

(b) Si diano le definizioni di forma bilineare simmetrica *definita positiva* e di *vettori ortogonali* rispetto a una forma bilineare simmetrica g.

(c) Si provi che se g è una forma bilineare simmetrica definita positiva e $v_1, \dots, v_s$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali rispetto a g, allora essi sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2 e $q : V \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$q(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}) = x_1 x_4 - x_2 x_3.$$

(a) Si determini la matrice della forma polare g di q rispetto alla base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

di V.

(b) Si determinino gli indici di g, specificando se g è non degenere e se è definita positiva.