SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA (30–1–2002)

Esercizio 1 (a) La retta s può determinarsi come $s = \pi_1 \cap \pi_2$, ove π_1 è il piano passante per P e parallelo al piano α di equazione $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$, mentre π_2 è il piano per P ortogonale ad r. Per determinare π_1 imponiamo il passaggio per P al generico piano parallelo ad α, che ha equazione $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = h$; si ottiene $\pi_1 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$. Un vettore direttore per la retta r è $(2, 1, 1)$; tale vettore coincide con un vettore normale per i piani ortogonali ad r, che hanno pertanto equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = l$; imponendo il passaggio per P si ottiene $\pi_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$. In definitiva $s : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$.
(b) r ed s sono sghembe se e solo se i vettori direttori rispettivi v_r, v_s e il vettore $\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$, $P' \in r$, sono linearmente indipendenti. Si ha $v_r = (2, 1, 1)$; equazioni vettoriali per s sono: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dunque $v_s = (0, 1, -1)$. Infine possiamo considerare $P' \equiv (-1, 0, 0)$. Si verifica subito che $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, pertanto r ed s sono sghembe.

Esercizio 2 (a) Risulta:

$$f(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dunque la matrice cercata è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(b) Coordinate di una base di $Ker(f)$ rispetto alla base assegnata si ottengono risolvendo il sistema omogeneo associato ad A, mentre coordinate per una base di $Im(F)$ si ottengono determinando una base dello spazio generato dalle colonne di A. Basi per $Ker(f)$, $Im(f)$ possono essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Esercizio 3 (a) La matrice A_k di F rispetto alla base canonica presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$ è $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 3 & 2k & 2 \end{pmatrix}$. Il polinomio carattestico di A_k è $t(t-4)(t-(k+2))$, dunque gli autovalori di F sono $0, 4, k+2$. Se $k \neq \pm 2$, tali autovalori sono distinti e F è diagonalizzabile. Se $k = -2$, l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2; la relativa molteplicità geometrica è $m_g(0) = 3 - rg(A_0) = 3 - 2 = 1 < 2 = m_a(0)$, pertanto F non è diagonalizzabile per $k = -2$. Se $k = 2$, l'autovalore 4 ha molteplicità algebrica 2; la relativa molteplicità geometrica è $m_g(4) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 < 2 = m_a(4)$, pertanto F non è diagonalizzabile per $k = 2$.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) La forma polare di q è

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}(x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2)$$

pertanto la matrice di g rispetto alla base assegnata è $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) Il polinomio caratteristico di A è $(t - \frac{1}{2})^2(t + \frac{1}{2})^2$, pertanto gli autovalori sono $\pm\frac{1}{2}$, ciascuno con molteplicità 2. Gli indici della forma sono $i_+(g) = i_-(g) = 2$, $i_0(g) = 0$. In particolare, g è non degenere ($i_0(g) = 0$) e non è definita positiva ($i_+(g) \neq 4$).