Esercizio 1 Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si considerino la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1, \end{cases}$$

ed i punti A, B di coordinate $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare un'equazione vettoriale per la retta r passante per i punti A, B.
(b) Determinare la posizione reciproca di r, s.
(c) Determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente r e parallelo ad s.

Esercizio 2 (a) Sia dia la definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.
(b) Sia V uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n$ vettori in V. Si provi che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Esercizio 3 Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2x_1 + kx_2 - x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(k è un parametro reale).

(a) Determinare la matrice di F rispetto alla base standard presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$. Determinare il valore di k per cui F non è invertibile.
(b) Per $k = 0$ determinare una base B di $Ker(F)$, una base di $\mathbb{R}^3$ contenente B, una base di $Im(F)$.
(c) Sempre per $k = 0$, studiare la diagonalizzabilità di F.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale V delle matrici reali quadrate 2×2 si considerino i sottospazi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{l} a+b+c=0 \\ c+d=0 \end{array} \right. \right\}, \qquad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{l} a-2b+2c-d=0 \\ b+c+d=0 \end{array} \right. \right\}.$$

(k è un parametro reale).
(a) Determinare basi per W e per U.
(b) Provare che risulta $V = W \oplus U$.