**Esercizio 1.** Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono $x_1, x_2, x_3$, si considerino le rette $r$ e $s$ di equazioni

$$r : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = t. \end{cases}$$

(a) Verificare che $r$ e $s$ sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta parallela alla retta $q$ di equazioni

$$q : \begin{cases} x_1 - 5 = 0 \\ x_2 - x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

e complanare con le rette $r$, $s$.

**Esercizio 2.** Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^5$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Determinare basi per $U$ e $W$.
(b) Determinare una base per $U + W$ e la dimensione di $U \cap W$.

**Esercizio 3.** Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$

$$F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 + 2a_2 t.$$

(a) Determinare una base di $Ker(F)$.
(b) Discutere la diagonalizzabilità di $F$ su $\mathbb{R}$.

**Esercizio 4.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e $F : V \to V$ un operatore lineare.
(a) Definire le nozioni di *autovalore, autovettore e autospazio* per $F$.
(b) Dimostrare che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

**Esercizio 5.** Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(a) Determinare la matrice della forma polare $g$ di $q$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare gli indici di $g$ una base di $Ker(g)$.