Facoltà di Scienze Statistiche

Prova di Matematica primo corso/Matematica 2 del 26-1-2009

Per l'esame di Matematica primo corso il candidato deve svolgere tutti gli esercizi in tre ore; per l'esame di Matematica 2 deve svolgere gli esercizi da 1 a 4 in due ore e mezzo.

COGNOME NOME ESAME CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

1. __________

2. __________

3. __________

4. __________

5. __________

Esercizio 1 Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3.

1. Si scrivano equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per i punti $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Si scriva un'equazione cartesiana per il piano π contenente la retta r e passante per il punto $P \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2 Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Determinare basi per U, W, $U + W$, $U \cap W$.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ presa come base di arrivo.

2. Determinare basi per $Ker\, F$, $Im\, F$.

Esercizio 4 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.
Determinare basi per gli autospazi di T e dire, motivando la risposta, se T è diagonalizzabile.

Esercizio 5 Sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_3y_4 - x_4y_3.$$

1. Determinare la matrice di g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
2. Dire se g è degenere e in tal caso determinare una base per il nucleo della forma.
3. Calcolare gli indici di g.