Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 2×2. Si consideri il sottospazio W_k di V generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (k è un paramatro reale).

(a) Determinare la dimensione di W_k al variare di k.

(b) Nel caso $k = 1$ determinare una base di W_1 e completarla ad una base di V.

(c) Sia

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V \mid \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_4 \end{cases} \right\}.$$

Determinare basi per U, $U + W_1$, $U \cap W_1$.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni

$$F(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.
b) Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.
c) Determinare, se esiste, una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

Esercizio 3. Sia $G = \mathbb{U}_{36}$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{36}$.
a) Determinare tutti i sottogruppi (ciclici e non ciclici!) di G e specificare se G è ciclico.
b) Fissato un sottogruppo S di G di ordine 3, costruire il gruppo quoziente G/S e dire se tale gruppo è ciclico.

Esercizio 4 Sia S_9 il gruppo simmetrico su 9 elementi e A_9 il sottogruppo alterno.
(a) Determinare le decomposizioni cicliche degli elementi di ordine 6 in S_9.
(b) Determinare due permutazioni $\sigma, \tau \in S_9$ di ordine 6 tali che i sottogruppi $\langle\sigma\rangle$, $\langle\tau\rangle$ non sono coniugati e tali che $\langle\sigma\rangle \subset A_9$, $\langle\tau\rangle \subset A_9$.