COMPITO DI GEOMETRIA DEL 14-2-2002

Esercizio 1. (a) Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente la retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{cases}$ e passante per il punto $P \equiv (0, 0, -1)$.

(b) Determinare equazioni vettoriali per la retta s passante per il punto $Q \equiv (-1, 0, 0)$ e ortogonale a π.

(c) Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s.

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 e W_k il sottospazio di V generato dalle matrici

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}, \, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -k \\ -k & 3 \end{bmatrix}, \, A_3 = \begin{bmatrix} k+1 & k+1 \\ k+1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

(k è un parametro reale).
(a) Determinare la dimensione di W_k al variare di k. Esiste un valore di k per cui A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti?

(b) Nel caso $k = 0$ determinare una base di W_0 e completarla ad una base di V.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, e sia $F : V \to V$ l'operatore lineare individuato dalle condizioni seguenti

$$F(1+t) = 1 + 2t + t^2, \quad F(1-t) = 1 - t^2, \quad F(t + t^2) = 1 + t.$$

(a) Si scriva la matrice di F rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ di V presa come base di partenza e di arrivo.
(b) Si determinino basi per $Ker(F)$, $Im(F)$.

Esercizio 4. Sia A una matrice $n \times n$.

(a) Si definiscano le nozioni di *autovalore, autovettore, polinomio caratteristico* per A.

(b) Provare che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2(x_1^2 + x_4^2 + x_1 x_4).$$

(a) Si determini la matrice della forma polare g di q rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(b) Si determini una base per $Ker(g)$.
(c) Si determinino gli indici di g.