SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA
DI GEOMETRIA (14–2–2002)

Esercizio 1 (a) Un'equazione vettoriale di r è $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pertanto un'equazione vettoriale per π è :

$$\pi : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminando i parametri t, k si ottiene l'equazione cartesiana $\pi : x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0$.
(b) La direzione di s coincide con la direzione normale a π, che è individuata dal vettore $(1, -1, 1)$. Pertanto $s : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(c) r ed s non sono parallele perchè i rispettivi vettori direttori v_r, v_s non sono proporzionali. Poichè $v_r = (1, 1, 0)$, $v_s = (1, -1, 1)$ e il vettore $\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ} \equiv (1, 1, 0)$, $P' \equiv (0, 1, 0) \in r$, sono linearmente dipendenti (il determinante della matrice che ha tali vettori per righe è nullo) concludiamo che r ed s sono incidenti.

Esercizio 2 La matrice delle coordinate di A_1, A_2, A_3 rispetto alla base $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ di V è $B_k = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 3 & -k & 3 \\ k+1 & k+1 & k+1 \end{bmatrix}$.

Risulta $\det(B_k) = 0 \ \forall k$, pertanto A_1, A_2, A_3 sono linearmente dipendenti per ogni k. Riducendo per righe si conclude che la matrice B_k è equivalente per ogni k alla matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

In particolare, una base di W_0 può essere $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Per completare tale insieme ad una base di V basta aggiungere una qualsiasi matrice non appartenente a W_0, ad esempio $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3 (a) Risulta

$$F(1) = F\left(\frac{1}{2}((1+t) + (1-t)\right) = \frac{1}{2}\left(F(1+t) + F(1-t)\right) = 1 + t$$

$$F(t) = F\left(\frac{1}{2}((1+t) - (1-t)\right) = \frac{1}{2}\left(F(1+t) - F(1-t)\right) = t + t^2$$

$$F(t^2) = F\left((t+t^2) - t\right) = F(t+t^2) - F(t) = 1 - t^2$$

pertanto la matrice cercata è $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Coordinate di una base di $Ker(F)$ rispetto alla base assegnata si ottengono risolvendo il sistema omogeneo associato ad A, mentre coordinate per una base di $Im(F)$ si ottengono determinando una base dello spazio generato dalle colonne di A. Basi per $Ker(F)$, $Im(F)$ possono essere $\{-1+t+t^2\}$, $\{1-t^2,\, t+t^2\}$.

Esercizio 4 Si vedano testi e dispense.

Esercizio 5 (a) La forma polare di q è

$$g\left((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)\right) = 2x_1y_1 + 2x_4y_4 + x_1y_4 + x_4y_1$$

pertanto la matrice di g rispetto alla base assegnata è $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Poichè A è la matrice di g rispetto alla base standard, $Ker(g)$ si determina risolvendo il sistema omogeneo associato ad A. Pertanto $Ker(g)$ ha equazioni $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.
Una base per le soluzioni di tale sistema può essere $\{(0,1,0,0),\, (0,0,1,0)\}$.
(c) Il polinomio caratteristico di A è $t^2(t-3)(t-1)$, pertanto gli autovalori sono $0, 1, 3$, con molteplicità rispettive 2,1,1. Gli indici della forma sono quindi $i_+(g) = i_0(g) = 2$, $i_-(g) = 0$.