Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito di un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3, si considerino le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x_1 - x_3 + 1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - 2 = 0, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Si scrivano equazioni cartesiane per la retta t passante per il punto $P \equiv (1, 2, 0)$, perpendicolare ad r e complanare con s.

(b) Si determini la distanza di t dall'origine.

Esercizio 2. Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare basi per $Ker(f)$ e $Im(f)$.

(b) Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice ortogonale ("unitaria reale") U tale che $U^t\,A\,U$ è diagonale.

Esercizio 4. Siano V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
(a) Definire la nozione di insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di vettori linearmente indipendenti in V.
(b) Dimostrare che se $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti, allora $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
(c) Dimostrare che se f è iniettiva e $v_1, \dots, v_n$ sono vettori linearmente indipendenti in V, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare standard si consideri il sottospazio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Determinare una base ortonormale per U.
(b) Determinare una base per l'ortogonale $U^\perp$ di U.
(c) Stabilire se risulta $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$.