Facoltà di Scienze Statistiche

Prova di Matematica primo corso/Matematica 2 del 26-1-2009

Per l'esame di Matematica primo corso il candidato deve svolgere gli esercizi 1.1, 1.3, 2, 3, 4, 5 in tre ore; per l'esame di Matematica 2 deve svolgere gli esercizi da 1.1, 1.2, 2, 3, 4 in due ore e mezzo.

COGNOME NOME ESAME CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

1.

2.

3.

4.

5.

Esercizio 1 Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$ sia fissato un riferimento cartesiano ortonormale rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3.

1. Si scrivano equazioni cartesiane per il piano π passante per il punto $A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e parallelo alle rette r, s così definite: r è la retta individuata dai punti $B \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, s è la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$.

2. Si verifichi che r, s sono sghembe.

3. Si scriva un'equazione cartesiana per il piano α ortogonale al piano di equazione $x_1 = 1$, parallelo alla retta di equazioni $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ e passante per il punto $P \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2 Sia U_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (k è un parametro reale) e W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

1. Determinare la dimensione di U_k al variare di k.
2. Determinare una base di W.
3. Determinare i valori di k per cui $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus W$.

Esercizio 3 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ a+b+c & a \end{pmatrix}.$$

1. Determinare basi per $Ker\, f$, $Im\, f$.
2. Calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita dalle condizioni seguenti:

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

2. Dire se F è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare N invertibile tale che $N^{-1}AN$ è diagonale.

Esercizio 5 Sia $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica

$$g(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

1. Determinare la matrice A di g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, specificando se g è degenere.

2. Determinare una matrice ortogonale P tale che P^tAP è diagonale.