Esercizio 1 Sia $G = \mathbb{U}_{24}$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{24}$.

(a) Scrivere gli elementi di G e determinarne gli ordini. Dire se G è ciclico.

(b) Determinare tutti i sottogruppi ciclici di G e almeno un sottogruppo non ciclico.

(c) Costruire esplicitamente un omomorfismo di gruppi non banale $\varphi : (G, \cdot) \to (\mathbb{Z}_4, +)$ e determinarne nucleo e immagine.

Esercizio 2 Si consideri il gruppo alterno A_4.

(a) Verificare che il sottogruppo K generato da $(1,3,4)$ non è normale. Verificare inoltre che il sottogruppo $H = \{Id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(3,2)\}$ è normale in A_4.

(c) Costruire il gruppo quoziente A_4/H.

Esercizio 3 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 e W lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \to W$ definita da

$$F(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ presa come base di partenza in V e alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ presa come base di arrivo in W.
(b) Determinare una base di $Ker(F)$ e una base di $Im(F)$.
(c) Determinare gli autovettori reali dell'operatore $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $L_A(X) = AX$, associato alla matrice A. Dire se L_A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Sia

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(a) Dimostrare che esiste un'unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Ker(F) = U$ e

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determinare la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ presa come base di partenza e di arrivo.
(c) Spiegare, senza calcolare il polinomio caratteristico, perchè F è diagonalizzabile.