

CORSO DI MATEMATICA II

Prof. Paolo Papi

ESERCIZI

1). Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali.

(a) $V = \mathbb{R}^3$.

- (1) $W_1 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- (2) $W_2 = \{(x_1, 1, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
- (3) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
- (4) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
- (5) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

(b) $V = M_{nn}(\mathbb{R})$

- (1) $U_1 = \{A \in V \mid {}^t A A = I_n\}$.
- (2) $U_2 = \{A \in V \mid {}^t A = A\}$.
- (3) $U_3 = \{A \in V \mid {}^t A = -A\}$.
- (4) $U_4 = \{A \in V \mid {}^t A = -2A\}$.
- (5) $U_5 = \{A \in V \mid \text{tr}(A) = 0\}$.
- (6) $U_6 = \{A \in V \mid \text{tr}(A) = 1\}$.
- (7) $U_7 = \{A \in V \mid a_{11} = 0\}$.
- (8) $U_8 = \{A \in V \mid n \text{ qualsiasi elementi sono nulli}\}$.
- (9) $U_9 = \{A \in V \mid n \text{ fissati elementi sono nulli}\}$.
- (10) $U_{10} = \{A \in V \mid a_{11}a_{22} = 0\}$.
- (11) $U_{11} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \forall i \leq j\}$.
- (12) $U_{12} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \forall i < j\}$.

(c) $V = \mathbb{R}_n[t]$

- (1) $Z_1 = \{p \in V \mid \text{deg}(p) = n - 2\}$.
- (2) $Z_2 = \{p \in V \mid \text{deg}(p) \leq n - 2\}$.
- (3) $Z_3 = \{p \in V \mid \text{deg}(p) < n - 2\}$.
- (4) $Z_4 = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$.
- (5) $Z_5 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p(1) = 1\}$.
- (6) $Z_6 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$. ($p'(x) = \frac{dp}{dx}$).

2). Nell'esercizio precedente si ponga $n = 3$; si determinino generatori lineari per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

3). Nell'esercizio 1) si ponga $n = 3$; si determinino basi per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

4). Si determinino basi per lo spazio delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei la cui matrice dei coefficienti è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5). Stabilire in ogni caso se gli insiemi di vettori v_1, v_2, \dots sono linearmente dipendenti o indipendenti.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 4)$, $v_3 = (-1, 0)$.

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (-2, 3, 4)$, $v_3 = (4, -1, 0)$.

(3) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, -1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$.

(4) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 2, 0, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1, 0)$,
 $v_4 = (0, 0, 0, 2)$, $v_5 = (1, 1, 1, 1)$.

(5) $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $V = T_2^+$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $V = S_3^-$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $V = sl(2)$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(9) $V = \mathbb{R}_2[t]$, $v_1 = t + 2t^2$, $v_2 = 1 + t$.

6). Si considerino gli insiemi di vettori v_1, v_2, \dots dell'esercizio 5; si determini, in ciascun caso, una base di $\langle v_1, v_2, \dots \rangle$.

7). Si considerino gli insiemi di vettori v_1, v_2, \dots dell'esercizio 5, parti 3,7,9. Si completino tali insiemi ad una base di V .

8). Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}, \quad U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

(a) Si determinino basi per W, U .

(b) Si provi che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

9). Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1 = (1, t, 1, 0), \quad w_2 = (1, 1, t, -1), \quad w_3 = (-2, -2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si determini la dimensione di S al variare del parametro t .

10). Siano $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ i sottospazi costituiti dalle soluzioni dei sistemi lineari omogenei associati alle matrici A_1, A_2 nell'es. 17). Si calcoli una base per $W_1 \cap W_2$ e una base per $W_1 + W_2$.

11). Si dimostri il teorema di Grassmann: se U, W sono sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale V , allora $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$. [Suggerimento: si consideri una base di $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $U \cap W$ e la si completi a una base di U tramite vettori u_1, \dots, u_s e a una base di W tramite vettori w_1, \dots, w_t . Si provi che $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ è una base di $U + W$].

12). Supponiamo che $\det(A) = 4$: quanto vale $\det(A {}^t A A^{-1})$?

13). Calcolare il rango delle matrici seguenti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

14). Risolvere con l'eliminazione di Gauss e con il metodo di Cramer i sistemi lineari le cui matrici complete sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

15). Si calcolino, se esistono, le inverse delle matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

16) Stabilire quali delle applicazioni seguenti sono lineari.

(1) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.

(2) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.

(3) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3)$.

(4) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_3 + x_2, x_2)$.

$$(5) F : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}),$$

$$F \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & a-d+c-b \end{pmatrix}.$$

$$(6) F : S_2^+ \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$F \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \\ a-c \end{pmatrix}.$$

$$(7) F : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_1t + (a_1 - a_2 + a_0)t^3.$$

$$(8) F : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_0.$$

$$(9) F : \mathbb{R}_2[t] \rightarrow \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1t + a_2t^2) = k, \text{ ove } k \text{ è una costante reale.}$$

17). Determinare $\text{Ker}(F)$, $\text{Im}(F)$ per quelle, fra le applicazioni definite nell'esercizio 16, che sono lineari. In tali casi, dopo aver fissato basi \mathcal{B}, \mathcal{C} per il dominio e il codominio di F , determinare ${}_c[F]_{\mathcal{B}}$.

18) Sia $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_4 - x_3, x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 - x_3).$$

Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{R}^4 e sia $\mathcal{C} = \{(1, 2, 3, 4), (0, 2, 3, 4), (0, 0, 3, 4), (0, 0, 0, 4)\}$. Dopo aver verificato che \mathcal{C} è una base di \mathbb{R}^4 , determinare

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{C}}, \quad {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}}.$$

19). Provare che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Ker}(F)$ ha per base i vettori $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e tale che $F((1, 0, 1)) = (2, 3, 4)$. Determinare la matrice di F rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 presa come base di partenza e di arrivo. Dire, infine, se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene a $\text{Im}(F)$.

20). Sia T_4^+ lo spazio delle matrici 4×4 triangolari superiori a coefficienti reali. Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^9 \rightarrow T_4^+$? Esiste un'applicazione lineare iniettiva $g : T_4^+ \rightarrow \mathbb{R}_7[t]$? Sia S_4^+ lo spazio delle matrici reali simmetriche 4×4 . Costruire, se esiste, un isomorfismo $h : T_4^+ \rightarrow S_4^+$.

21). Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}, \quad U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

- (a) Si determinino basi per W, U .
 (b) Si provi che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.
 (c) Si determini la matrice associata all'operatore $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$\pi(w + u) = w, \quad w \in W, u \in U$$

rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 presa come base di partenza e di arrivo.

22). Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1 = (1, t, 1, 0), \quad w_2 = (1, 1, t, -1), \quad w_3 = (-2, -2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Si determini la dimensione di S al variare del parametro t .
 b) Per $t = 1$ si costruisca un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\text{Ker} f = S$.

23). Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare tale che

$$f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Si scriva la matrice che rappresenta l'operatore f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 .
 b) Si determinino basi per $\text{Ker} f$ e $\text{Im} f$.

24). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V ; sia poi W lo spazio delle matrici simmetriche 2×2 .

- (1) Si provi che esiste un unico operatore lineare $F : V \rightarrow W$ tale che

$$F(v_1 + v_2 + v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \in \text{Ker} F, \quad F(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (2) Si trovi la matrice di F rispetto a B scelta come base di partenza in V e $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ scelta come base di arrivo in W ;

25). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2 . Si considerino i seguenti sottospazi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = c = 0 \right\}, \quad U_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{cases} ka - 2b + 2c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

(k è un parametro reale).

- (1) Determinare $\dim U_k$ al variare di k .
- (2) Determinare $\dim (W + U_k)$ al variare di k ; nel caso $k = 0$ determinare una base di $W + U_0$.
- (3) Determinare i valori di k per cui $V = W \oplus U_k$.

26). Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- (1) Si provi che $U = V$ e si determinino equazioni cartesiane per tale sottospazio.
- (2) Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$; si determini una base per $U \cap W$.

27). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2 . Si consideri l'operatore lineare $F : V \rightarrow V$ definito da

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ kx_3 & kx_1 \end{pmatrix}$$

(k è un parametro reale).

Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k .