CORSO DI GEOMETRIA

Prof. Paolo Papi

ESERCIZI

1). Sia $A \in M(n,m)$ e $I_k \in M(k,k)$ la matrice identità . Si provi che

$$A\, I_m = A, \qquad I_n\, A = A.$$

2). Si provi che ogni matrice quadrata di ordine n può scriversi come somma di una matrice tiangolare inferiore, una matrice diagonale e una triangolare superiore. Si provi poi che ogni matrice quadrata di ordine n può scriversi come somma di una matrice antisimmetrica e una triangolare superiore. Tale decomposizioni sono uniche ?

3). Calcolare il rango delle matrici seguenti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4). Studiare i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c - d + 5e - f - g = 1 \\ 2a + b + 2c - 4d + e - 4f - g = 0 \\ 4c - b - 3d + 2e - f + 2g = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

5) . Stabilire se

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

6). Si provi direttamente (senza usare la teoria del determinante) che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora

$$rk(A) = 2 \iff ad - bc \neq 0$$

7). Risolvere con l'eliminazione di Gauss e con il metodo di Cramer i sistemi lineari le cui matrici complete sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8). Sia $A = (a_{ij}) \in M_{nn}$ una matrice triangolare superiore (o inferiore). Si provi che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9). Si calcoli il determinante della seguente matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

10). Si calcolino, se esistono, le inverse delle matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

11). Costruire, se possibile, un sistema lineare non omogeneo di cinque equazioni in sei incognite con ∞^2 soluzioni, e un sistema omogeneo di tre equazioni in due incognite con soluzione unica.

12). Si calcoli $\det(-A)$ in termini di $\det(A)$. Si deduca che una matrice antisimmetrica (tale cioè che $A = -\, {}^tA$) ha determinante nullo.

13). Supponiamo che $\det(A) = 4$: quanto vale $\det(A\ {}^tA\, A^{-1})$?

14). Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali.

(a) $V = \mathbb{R}^3$.

(1) $W_1 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

(2) $W_2 = \{(x_1, 1, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
(3) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
(4) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
(5) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

(b) $V = M_{n\,n}(\mathbb{R})$

(1) $U_1 = \{A \in V \mid \ {}^tA\,A = I_n\}$.
(2) $U_2 = \{A \in V \mid \ {}^tA = A\}$.
(3) $U_3 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -A\}$.
(4) $U_4 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -2A\}$.
(5) $U_5 = \{A \in V \mid tr(A) = 0\}$.
(6) $U_6 = \{A \in V \mid tr(A) = 1\}$.
(7) $U_7 = \{A \in V \mid a_{11} = 0\}$.
(8) $U_8 = \{A \in V \mid n$ qualsiasi elementi sono nulli$\}$.
(9) $U_9 = \{A \in V \mid n$ fissati elementi sono nulli$\}$.
(10) $U_{10} = \{A \in V \mid a_{11}a_{22} = 0\}$.
(11) $U_{11} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i \leq j\}$.
(12) $U_{12} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i < j\}$.

(c) $V = \mathbb{R}_n[t]$

(1) $Z_1 = \{p \in V \mid deg(p) = n - 2\}$.
(2) $Z_2 = \{p \in V \mid deg(p) \leq n - 2\}$.
(3) $Z_3 = \{p \in V \mid deg(p) < n - 2\}$.
(4) $Z_4 = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$.
(5) $Z_5 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p(1) = 1\}$.
(6) $Z_6 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$. $(p'(x) = \frac{dp}{dx})$.

15). Nell'esercizio precedente si ponga $n = 3$; si determinino generatori lineari per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

16). Nell'esercizio 14) si ponga $n = 3$; si determinino basi per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

17). Si determinino basi per lo spazio delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei la cui matrice dei coeffcienti è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

18). Stabilire in ogni caso se gli insiemi di vettori $v_1, v_2, \dots$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $\quad v_1 = (1,3)$, $v_2 = (2,4)$, $v_3 = (-1,0)$.

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad v_1 = (1,0,3)$, $v_2 = (-2,3,4)$, $v_3 = (4,-1,0)$.

(3) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v_1 = (1,-1,1,-1)$, $v_2 = (1,0,1,0)$.

(4) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,2,0,0), v_3 = (1,0,1,0)$,
$v_4 = (0,0,0,2)$, $v_5 = (1,1,1,1)$.

(5) $V = M_{2\,2}(\mathbb{R})$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) $V = T_2^+$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $V = S_3^-$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(8) $V = sl(2)$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(9) $V = \mathbb{R}_2[t]$, $\quad v_1 = t + 2t^2$, $v_2 = 1 + t$.

19). Si considerino gli insiemi di vettori $v_1, v_2, \dots$ dell'esercizio 18; si determini, in ciascun caso, una base di $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots)$.

20). Si considerino gli insiemi di vettori $v_1, v_2, \dots$ dell'esercizio 18, parti 3,7,9. Si completino tali insiemi ad una base di V.

21). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}, \quad U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

(a) Si determinino basi per W, U.

(b) Si provi che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.

22). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1 = (1,t,1,0), \quad w_2 = (1,1,t,-1), \quad w_3 = (-2,-2,-2,1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si determini la dimensione di S al variare del parametro t.

23). Siano $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ i sottospazi costituiti dalle soluzioni dei sistemi lineari omogenei associati alle matrici A_1, A_2 nell'es. 17). Si calcoli una base per $W_1 \cap W_2$ e una base per $W_1 + W_2$.

24). Si dimostri il teorema di Grassmann: se U, W sono sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale V, allora $dim(U+W) + dim(U \cap W) = dim(U) + dim(W)$. *[Suggerimento: si consideri una base di $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $U \cap W$ e la si completi a una base di U tramite vettori $u_1, \dots, u_s$ e a una base di W tramite vettori $w_1, \dots w_t$. Si provi che $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots w_t\}$ è una base di $U + W$].*

25) Stabilire quali delle applicazioni seguenti sono lineari.

(1) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
(2) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
(3) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3)$.
(4) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_3 + x_2, x_2)$.
(5) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & a-d+c-b \end{pmatrix}.$$

(6) $F : S_2^+ \to \mathbb{R}^4$

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \\ a-c \end{pmatrix}.$$

(7) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 t + (a_1 - a_2 + a_0) t^3$.
(8) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0$.
(9) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = k$, ove k è una costante reale.

26). Determinare $Ker(F)$, $Im(F)$ per quelle, fra le applicazioni definite nell'esercizio 26, che sono lineari. In tali casi, dopo aver fissato basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ per il dominio e il codominio do F, determinare $\;_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}$.

27) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_4 - x_3, x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 - x_3).$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{C} = \{(1,2,3,4), (0,2,3,4), (0,0,3,4), (0,0,0,4)\}$. Dopo aver verificato che $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, determinare

$$_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad _{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{C}}, \quad _{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad _{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}}.$$

28). Provare che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(F)$ ha per base i vettori $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e tale che $F((1,0,1)) = (2,3,4)$.

Determinare la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo. Dire, infine, se il vettore $(1,2,3)$ appartiene a $Im(F)$.

29). Sia T_4^+ lo spazio delle matrici 4×4 triangolari superiori a coefficienti reali. Esiste un 'applicazione lineare suriettiva $f:\mathbb{R}^9\to T_4^+$? Esiste un'applicazione lineare iniettiva $g:T_4^+\to\mathbb{R}_7[t]$? Sia S_4^+ lo spazio delle matrice reali simmetriche 4×4. Costruire, se esiste, un isomorfismo $h:T_4^+\to S_4^+$.

30). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=0\},\quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \begin{cases}2x+y-z=0\\ y+z=0\end{cases}\right\}$$

(a) Si determinino basi per W,U.
(b) Si provi che $\mathbb{R}^3=W\oplus U$.
(c) Si determini la matrice associata all'operatore $\pi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito da

$$\pi(w+u)=w,\qquad w\in W,u\in U$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo.

31). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1=(1,t,1,0),\quad w_2=(1,1,t,-1),\quad w_3=(-2,-2,-2,1),\quad t\in\mathbb{R}.$$

a) Si determini la dimensione di S al variare del parametro t.

b) Per $t=1$ si costruisca un'applicazione lineare suriettiva $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Ker}f=S$.

32). Sia $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ l'operatore lineare tale che

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Si scriva la matrice che rappresenta l'operatore f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b) Si determinino basi per $\mathrm{Ker}f$ e $\mathrm{Im}f$.

33). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V; sia poi W lo spazio delle matrici simmetriche 2×2.

(1) Si provi che esiste un unico operatore lineare $F : V \longrightarrow W$ tale che

$$F(v_1 + v_2 + v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \in Ker\, F, \quad F(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Si trovi la matrice di F rispetto a B scelta come base di partenza in V e $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ scelta come di base di arrivo in W;

34). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Si considerino i seguenti sottospazi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = c = 0 \right\}, \qquad U_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{cases} ka - 2b + 2c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

(k è un parametro reale).

(1) Determinare $dim\, U_k$ al variare di k.

(2) Determinare $dim\,(W + U_k)$ al variare di k; nel caso $k = 0$ determinare una base di $W + U_0$.

(3) Determinare i valori di k per cui $V = W \oplus U_k$.

35). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad V = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(1) Si provi che $U = V$ e si determinino equazioni cartesiane per tale sottospazio.

(2) Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$; si determini una base per $U \cap W$.

36). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$ definito da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ kx_3 & kx_1 \end{pmatrix}$$

(k è un parametro reale).

Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.