Prova di Matematica II del 27–5–2002

Esercizio 1. In $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e il sottospazio W di equazioni $\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

(a) (5 punti). Determinare basi per U e W.

(b) (5 punti). Determinare equazioni cartesiane per $U \cap W$.

(c) (5 punti). Determinare una base per $U \cap W$ e la dimensione di $U + W$.

(d) (5 punti). Completare la base di $U \cap W$ determinata nella parte (c) a una base di $\mathbb{R}^4$; determinare, rispetto a tale base, le coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2. Sia V lo spazio delle matrici quadrate 2×2 e sia $F : V \to V$ l'operatore lineare:

$$F(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 - x_4 & x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 & x_1 - x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) (7 punti). Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.

(b) (7 punti). Calcolare gli autovalori di F. Dire, motivando la risposta, se F è diagonalizzabile.

(c) (6 punti). Sia $W = \mathbb{R}_1[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore uguale a 1. Costruire un isomorfismo $G : Ker(F) \to W$. Calcolare poi $G(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix})$.

Esercizio 3. (a) (4 punti). Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Definire le nozioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(b) (6 punti). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori in V linearmente indipendenti, con $k < n$. Si provi che esistono vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in V tali che $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.