3.

FACOLTA' DI SCIENZE STATISTICHE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA PER
LE ANALISI DEMOGRAFICHE E SOCIALI

Matematica II
3–6–2003

NOME COGNOME

1.

2.

3.

Esercizio 1. Sia V lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Si considerino i seguenti sottospazi

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \mid \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Determinare basi per U e W.

(b) Determinare basi per $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Completare la base di $U + W$ determinata nella parte (b) a una base di V.

(d) Determinare un intero n per cui esiste un isomorfismo tra $U \cap W$ e $\mathbb{R}^n$. Scrivere poi un tale isomorfismo.

Esercizio 2. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni seguenti

$$F(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo.

(b) Determinare esplicitamente $F(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix})$ per ogni $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.

(d) Calcolare gli autovalori ed autovettori di F. Dire, motivando la risposta, se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. (a) Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.
Definire le nozioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori in V linearmente indipendenti, con $k < n$. Si provi che esistono vettori $v_{k+1}, \dots, v_n$ in V tali che $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V.