Corso di Matematica per la Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni
Esonero 13/06/2014. Tempo a disposizione: 2 ore

- **ESERCIZIO 1**. Calcolare l'integrale $\int_4^5 \frac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2} dx$
- **ESERCIZIO 2**. Determinare l'integrale indefinito $\int x^2 \sin x \, dx$
- **ESERCIZIO 3**. Calcolare l'integrale $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$
- **ESERCIZIO 4**. Dire se la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$ è convergente, giustificando la risposta.
- **ESERCIZIO 5**. Dire se la serie $\sum_{n=1}^\infty \left(1+(-1)^{n^2}\right)$ è convergente, giustificando la risposta.
- **ESERCIZIO 6**. Risolvere l'equazione differenziale $x'(t) = 5x(t)$ con condizione iniziale $x(0) = 2$.

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

Esercizio 1. Notiamo che $x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = x(x^2 - 3x + 2) + 2x - 5$ e quindi $\frac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2} = x + \frac{2x-5}{x^2-3x+2}$.
Osserviamo che $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ quindi cerchiamo costanti A, B tali che

$$\frac{2x-5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \,.$$

Essendo $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2}$ dobbiamo imporre $A + B = 2$ e $-2A - B = -5$. Quindi otteniamo $A = 3, B = -1$. In conclusione abbiamo la seguente rappresentazione dell'integrando

$$\frac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2} = x + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2} \,,$$

da cui il suo integrale primo è

$$\int \frac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2} dx = \frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| - \ln|x-2| + \text{ costante } .$$

Concludiamo che

$$\int_4^5 \frac{x^3-3x^2+4x-5}{x^2-3x+2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| - \ln|x-2|\right]_4^5$$
$$= \frac{9}{2} + 3\ln 4 - 4\ln 3 + \ln 2 \,.$$

Esercizio 2. Dato che $D(-\cos x) = \sin x$ per integrazione per parti abbiamo $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$. Riapplichiamo l'integrazione per parti usando che $D \sin x = \cos x$ e troviamo che $\int 2x \cos x \, dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx = 2x \sin x + 2\cos x + c$. Mettendo insieme le precedenti uguaglianze otteniamo

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c \,.$$

Esercizio 3. L'integrale è definito come

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \,.$$

Il suddetto limite esiste perchè l'integrando è una funzione positiva (l'integrale su $[0,b]$ esiste dato che l'integrando è una funzione continua).

Consideriamo la funzione $y(x) = e^x$ e scriviamo $\frac{e^x}{e^{2x}+1} = \frac{y'(x)}{y^2(x)+1}$. Usando la regola di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti abbiamo quindi

$$\int_0^b \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int_0^b \frac{y'(x)}{y^2(x)+1} = \int_1^{e^b} \frac{1}{z^2+1}dz\,.$$

Sappiamo che $\int \frac{1}{z^2+1} = \mathrm{arctgz} +$ costante quindi

$$\int_1^{e^b} \frac{1}{z^2+1}dz = \mathrm{arctg}(\mathrm{e}^\mathrm{b}) - \mathrm{arctg}(1)\,.$$

In alternativa si poteva osservare direttamente che $D(\mathrm{arctg}(\mathrm{e}^\mathrm{x})) = \frac{\mathrm{e}^\mathrm{x}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}+1}$.

Abbiamo che $\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty$ e $\lim_{c\to\infty} \mathrm{arctg}(\mathrm{c}) = \frac{\pi}{2}$. Quindi $\lim_{b\to+\infty} \mathrm{arctg}(\mathrm{e}^\mathrm{b}) = \pi/2$. Inoltre $\mathrm{arctg}(1)$ è l'unico valore $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ per cui $\tan v = \sin v/\cos v = 1$. Dato che deve essere $\sin v = \cos v$ abbiamo $v = \pi/4$. In conclusione

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4\,.$$

Esercizio 4. Chiamo a_n il termine n–esimo della serie, ovvero $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Osserviamo che il rapporto $a_{n+1}/a_n = \frac{2}{n+1}$ tende a zero con $n \to +\infty$. Per il criterio del rapporto concludiamo che la serie è convergente.

Esercizio 5. La serie non è convergente in quanto il termine n–esimo a_n non tende a zero con $n \to +\infty$. In realtà la serie diverge a $+\infty$. Infatti $a_n = 0$ con n dispari e $a_n = 2$ con n pari. Quindi $\sum_{n=1}^k a_n = 2[k/2]$ dove $[k/2]$ è la parte intera di $k/2$. Questa tende a $+\infty$ quando $k \to +\infty$.

Esercizio 6. La soluzione è $x(t) = 2e^{5t}$. Questa evidentemente risolve l'equazione. Siccome si tratta di un'equazione ordinaria del primo ordine, lineare e omogenea, la soluzione del problema di Cauchy è unica.