Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Si considerino i punti

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e il vettore } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Si trovi un'equazione parametrica della retta r passante per i punti A, B.
b) (2 punti) Si trovino equazioni cartesiane della retta r' passante per il punto C avente direzione v.
c) (3 punti) Si determini la posizione reciproca di r, r'.
d) (2 punti) Si determini il piano π del fascio di asse r passante per C
e) (3 punti) Si calcoli la distanza tra r e r'.

a) L'equazione è del tipo $\vec{OP} = \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA})$. In coordinate

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Un'equazione vettoriale è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eliminando t si ottiene $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_2 = -1 \end{cases}$

c) Poiché i vettori direttori di r, r' non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Risultano sghembe se e solo se

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Bisogna risolvere il sistema $\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases}$ che è incompatibile.

Quindi le rette sono sghembe

d) Il fascio di asse r ha equazione

$$\lambda(x_2 + x_3 - 1) + \mu(x_1 - x_3 - 1) = 0$$

Imponendo il passaggio per C si ottiene $-2\lambda - \mu = 0$, per cui si può prendere $\mu = 2$, $\lambda = -1$ e il piano è $2x_1 - x_2 - 3x_3 - 1 = 0$

e) La distanza cercata è quella del punto A (ad esempio) dal piano $\bar{\pi}$ per r' parallelo ad r. Quest'ultimo piano ha equazione vettoriale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ed equazione cartesiana $x_1 = x_3$, per cui

$$d(A, \bar{\pi}) = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi complessi di grado minore o uguale di 5.

a) (3 punti) Dimostrare che $\{1, 1+t, 1+t^2\}$ è una base del sottospazio U di V formato dai polinomi di grado minore o uguale 2 e calcolare le coordinate di $2+3t+4t^2$ rispetto a questa base.

b) (5 punti) Determinare una base del sottospazio $W = \{p(t) \in V \mid p(i) = p(-i) = p(1) = 0\}$ di V.

c) (3 punti) Completare la base trovata nel punto b) a una base di V.

a) Poiché $\dim U = 3$, basta verificare che $1, 1+t, 1+t+t^2$ sono linearmente indipendenti: sia

$$\alpha \cdot 1 + \beta(1+t) + \gamma(1+t^2) = 0$$

Allora $\alpha+\beta+\gamma + (\beta+\gamma)t + \gamma t^2$ è il polinomio nullo, dunque

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$ che implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Dobbiamo poi trovare α, β, γ tali che

$$2+3t+4t^2 = \alpha + \beta(1+t) + \gamma(1+t+t^2)$$

allora $$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$, da cui $$\begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

b) Un generico polinomio è del tipo

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

Le condizioni sono

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_0 + i a_1 - a_2 - i a_3 + a_4 + i a_5 = 0 \\ a_0 - i a_1 - a_2 + i a_3 + a_4 - i a_5 = 0 \end{cases}$$

Bisogna quindi risolvere il sistema di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i \end{pmatrix}$$

La forma a gradini ridotta è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto una base di $\ker B$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

quindi una base di W è $-t+t^5$, $-1+t^4$, $-1+t-t^2+t^3$.

c) Si osservi che la matrice delle coordinate della base trovata rispetto alla base standard di W è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pertanto i polinomi t^3, t^4, t^5 completano la base di W trovata in precedenza a una base di V

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrice quadrate $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.
a) (4 punti) Si consideri

$$W = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } |i-j| = 1\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio di V e calcolarne la dimensione.
b) (2 punti) Nel caso $n = 3$, calcolare la dimensione dell'intersezione di W col sottospazio delle matrici simmetriche.
c) (5 punti) Dimostrare che se $A, B \in V$, allora $rk(AB) \leq \min\{rk(A), rk(B)\}$. (Suggerimento: si considerino i sistemi lineari omogenei associati ad AB, A, B e si ricordi che il rango di una matrice coincide con quello della trasposta).

a) Dobbiamo vedere che se $A, B \in W$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, allora $\alpha A + \beta B \in W$. Per ipotesi $(A)_{ij} = (B)_{ij} = 0$ se $|i-j| = 1$, pertanto

$$(\alpha A + \beta B)_{ij} = \alpha (A)_{ij} + \beta (B)_{ij} = 0 \quad \text{se } |i-j| = 1.$$

Osserviamo che $(A)_{ij} = 0$ per $|i-j| = 1$ significa $(A)_{i\,i+1} = (A)_{i+1\,i} = 0$ per $i = 1, \dots, n-1$. Quindi un insieme di generatori è dato dalle matrici elementari e_{ij}, $j \neq i \pm 1$; essendo tali matrici un sottoinsieme della base standard di V, esse sono linearmente indipendenti, quindi sono una base. Infine

$$\dim W = n^2 - 2(n-1) = (n-1)^2 + 1$$

b) Nel caso $n = 3$ la matrice generica in W è $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix}$, che è simmetrica se $b = d$, quindi una base per lo spazio cercato è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la dimensione è 4

c) Bisogna far vedere che $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$, $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$.

Ricordiamo che per ogni $C \in V$, $\mathrm{rk}(C) + \dim \ker C = n$.

Osserviamo che $\ker B \subseteq \ker AB$, per cui

$\mathrm{rk}(B) \geq \mathrm{rk}(AB)$.

D'altra parte $\ker A^t \subseteq \ker B^t A^t = \ker (AB)^t$

per cui

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) \geq \mathrm{rk}(B^t A^t) = \mathrm{rk}((AB)^t) = \mathrm{rk}(AB).$$

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sia fissato un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate puntuali sono x_1, x_2, x_3. Si considerino i punti

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, C \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e il vettore } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Si trovi un'equazione parametrica della retta r passante per i punti A, B.
b) (2 punti) Si trovino equazioni cartesiane della retta r' passante per il punto C avente direzione v.
c) (3 punti) Si determini la posizione reciproca di r, r'.
d) (2 punti) Si determini il piano π del fascio di asse r passante per C.
e) (3 punti) Si calcoli la distanza tra r e r'.

a) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_2 = -1 \end{cases}$$

c) Le rette sono sghembe

d) $3x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0$

e) $d(r, r') = d(A, \pi') \qquad \pi' : \; x_1 - x_3 = 0$

$$= \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrice quadrate $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$.
a) (4 punti) Si consideri

$$W = \{(a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ se } |i-j| = n-1\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio di V e calcolarne la dimensione.
b) (2 punti) Nel caso $n = 3$, calcolare la dimensione dell'intersezione di W col sottospazio delle matrici simmetriche.
c) (5 punti) Dimostrare che se $A, B \in V$, allora $rk(AB) \leq \min\{rk(A), rk(B)\}$. (Suggerimento: si considerino i sistemi lineari omogenei associati ad AB, A, B e si ricordi che il rango di una matrice coincide con quello della trasposta).

a) $a_{ij} = 0$ se $|i-j| = n-1$ significa $i-j = \pm(n-1)$. Se $i,j \in \{1,\dots,n\}$ ciò capita solo quando $i=n$ e $j=1$ o viceversa $i=1$ e $j=n$.
Dunque $W = \{(a_{ij}) \mid a_{1n} = a_{n1} = 0\}$, ed è chiaramente un sottospazio: se $A, B \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha A + \beta B)_{1n} = \alpha (A)_{1n} + \beta (B)_{1n} = 0$$
$$(\alpha A + \beta B)_{n1} = \beta (A)_{n1} + \beta (B)_{n1} = 0$$

Chiaramente $\{e_{ij} \mid (i,j) \notin \{(n,1),(1,n)\}\}$ è un insieme di generatori, indipendenti perché parte di una base di V. Dunque $\dim V = n^2 - 2$

b) $\{e_{ii}\}_{i=1}^{n} \cup \{e_{ij} + e_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ è una base delle matrici simmetriche. Tutti i vettori appartengono a W tranne $e_{1n}+e_{n1}$. Dunque la dimensione dell'intersezione è $\frac{n(n+1)}{2} - 1$

c) Si vedano le soluzioni dell'altro compito

Esercizio 2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi complessi di grado minore o uguale di 5.
a) (3punti) Dimostrare che $\{t^2, t^2+t, 1+t^2\}$ è una base del sottospazio U di V formato dai polinomi di grado minore o uguale 2 e calcolare le coordinate di $2+3t+4t^2$ rispetto a questa base.
b) (5 punti) Determinare una base del sottospazio $W = \{p(t) \in V \mid p(i) = p(-i) = p(1) = 0\}$ di V.
c) (3 punti) Completare la base trovata nel punto b) a una base di V.

a) Poiché $\dim U = 3$, basta dimostrare che t^2, t^2+t, $1+t^2$ sono linearmente indipendenti.
Supponiamo $a t^2 + b(t^2+t) + c(1+t^2) = 0$.
Allora $(a+b+c)t^2 + bt + c = 0$, da cui $a+b+c = b = c = 0$, che implica $a = b = c = 0$

b), c) Si vedano le soluzioni dell'altro compito

$$2+3t+4t^2 = at^2 + b(t^2+t) + c(1+t^2)$$

$$\begin{cases} a+b+c = 4 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$