PROVA DI ALGEBRA DEL 20-12-2002

Esercizio 1 In $\mathbb{R}^4$ siano W_1, W_2 i sottospazi di equazioni $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$, $x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$, rispettivamente.

(a) (3 punti) Determinare basi per W_1, W_2.

(b) (4 punti) Determinare una base per $W_1 \cap W_2$.

(c) (6 punti) Determinare equazioni per $(W_1 \cap W_2) \oplus \mathbb{R}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

Esercizio 2 Sia $V = \mathbb{R}_2[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due a coefficienti reali. Sia $F_k : V \to V$ l'operatore lineare individuato dalle condizioni seguenti:

$$F_k(1+t) = 1+k+kt, \quad F_k(t+t^2) = k+kt-t^2, \quad F_k(1+t+t^2) = 1+k+kt-t^2.$$

(a) (5 punti) Determinare la matrice di F_k rispetto alla base $\{1, t, t^2\}$ presa come base di partenza e di arrivo in V.

(b) (3 punti) Determinare i valori di k per cui F_k è un isomorfismo.

(c) (6 punti) Determinare i valori di k per cui F_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 (a) (5 punti) Siano G un gruppo e sia $\varphi : G \to G$ l'applicazione $\varphi(g) = g^2$. Si provi che φ è un omomorfismo di gruppi se e solo se G è abeliano.

(b) (4 punti) Sia G un gruppo ciclico di ordine 27 e g un suo generatore. Determinare tutti i generatori di G e gli ordini dei sottogruppi di G.

(c) (4 punti) Siano $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 8 & 4\end{pmatrix}$ e $\beta = (1,2,8)(4,7,6)(2,3)$. Calcolare l'ordine e la parità di $\beta \cdot \alpha^{-1}$.

Esercizio 3 (a) (3 punti) Definire l'ordine di un elemento g di un gruppo G.

(b) (7 punti) Provare che matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.