Esercizio 1. (a) (4 punti). Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e avente $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ come vettore direttore.

(b) (3 punti). Determinare un'equazione cartesiana per il piano π passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ parallelo al piano $x_2 - x_3 = 5$.

(c) (2 punti). Determinare $P = r \cap \pi$.

(d) (6 punti). Determinare un'equazione cartesiana per il piano α passante per P, parallelo ad r e ortogonale a π.

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e W_k quello generato, al variare di $k \in \mathbb{R}$, da $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) (7 punti). Determinare, al variare di k, $dim(V \cap W_k)$, $dim(V + W_k)$.

(b) (8 punti). Si scriva, al variare di k, una base di $V \cap W_k$ e una di $V + W_k$.

Esercizio 3. (a) (5 punti). Determinare la dimensione dello spazio delle matrici reali 4×4 simmetriche a traccia nulla.

(b) (5 punti). Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore uguale a 3. Per i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui risulta essere un sottospazio di V, determinare una base di

$$U_k = \{p \in V \mid p(k) = 0, p'(0) = k\}$$

$(p' = \frac{dp}{dt})$.

Esercizio 4. (a) (3 punti) Dare la definizione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.

(b) (7 punti) Si provi che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.