

Matematica III

25-11-2002

Esercizio 1. (11 punti) Determinare la natura dei punti stazionari ed i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ per $(x, y) \in Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Esercizio 2. (7 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^3}{y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. (11 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = e^{2x}$$

Esercizio 4. (11 punti) Calcolare l'integrale doppio

$$\int \int_T e^{\frac{x}{y}} dx dy$$

ove T è il triangolo curvilineo compreso tra le rette $y = 1$, $x = 0$ e la parabola $x = y^2$. (Suggerimento: si osservi che T è un dominio normale anche rispetto all'asse y).

Esercizio 5. (10 punti) (a) Definire la nozione di differenziabilità in un punto per una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ove A è un aperto di \mathbb{R}^2 .

(b) Siano α, β, γ costanti reali positive. Provare che limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma}$$

esiste finito (e vale 0) se e solo se $\alpha + \beta > 2\gamma$.

Esercizio *. (a) Determinare e disegnare l'insieme di definizione della funzione $g(x, y) = \frac{\ln(x)e^{1/y} \cos(\cos(y))}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$.

(b) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x + y^3}$$

(c) Studiare continuità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 - y^2} - 1 - x^2 + y^2 - x^4/2 - y^4/2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$