Matematica III
4–11–2002

Esercizio 1. (3 punti) Provare che se $\underline{x}, \underline{y}$ sono due punti distinti di $\mathbb{R}^2$ allora esistono intorni $I_{\underline{x}}$, $I_{\underline{y}}$ di $\underline{x}$, $\underline{y}$ rispettivamente, tali che $I_{\underline{x}} \cap I_{\underline{y}} = \emptyset$.

Esercizio 2. (8 punti) Si considerino gli insiemi

$$X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$
$$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$
$$X_3 = \{(1 - \frac{1}{n}, 0) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$$

Posto $Y = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ determinare $Int(Y)$, Y', $Fr(Y), \overline{Y}$.

Esercizio 3. (7 punti) Determinare e disegnare il dominio di definizione della funzione

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}{\ln(2 - x^2 - 2y^2)}.$$

Esercizio 4. (7 punti) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y+x}{x^3}$$

Esercizio 5. (15 punti) Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^3 y^2 \cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$.

Esercizio 6. (10 punti) Determinare i massimi e i minimi relativi della funzione $f(x,y) = e^{-x^2} \cos(y)$.