CORSO DI MATEMATICA DISCRETA I (ALGEBRA)

Prof. Paolo Papi

ESERCIZI

1). Siano A, B, C insiemi. Provare che

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B).$$

2). Definiamo la *differenza simmetrica* di due insiemi A, B come $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Si provi che $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3). Si dica se le corrispondenze individuate dai seguenti insiemi sono applicazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$$
$$\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$$

4). Esaminare gli esempi di relazione fatti a lezione e stabilire in dettaglio se si tratta di relazioni di equivalenza, di ordine parziale, di ordine totale.

5). Sia ρ una relazione simmetrica e transitiva su un insieme A. si provi che ρ è una relazione di equivalenza se e solo se vale la seguente proprietà :

$$\forall\ a \in A\ \exists b \in A : a\rho b.$$

6). Si provi che le proprietà riflessiva, simmetrica , transitiva sono tra loro indipendenti fornendo esempi di relazioni che verificano due qualsiasi tali proprietà ma non la terza.

7). Sia P l'insieme dei punti del piano. Sia ρ la relazione su P cosi' definita: $p_1 \rho p_2$ se p_1, p_2 sono equidistanti da un fissato punto O. Si provi che ρ è una relazione di equivalenza e si determini P/ρ.

8). Definiamo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = n + m'$.

(1) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(2) Verificare che le coppie del tipo $(m, 0)$, $(0, n)$, $(0, 0)$, $m, n \neq 0$ sono un insieme di rappresentanti per le classi di $\sim$-equivalenza.

(3) Provare che le seguenti operazioni

$$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+m', n+n')],$$
$$[(m,n)] \cdot [(m',n')] = [(mm'+nn', mn'+m'n)]$$

sono ben poste. Si provi che $[(0,0)]$ è elemento neutro per la somma e che ogni elemento ha un inverso additivo.

9). Scrivere la tabella di addizione e moltiplicazione per $\mathbb{Z}_4$; verificare che esistono $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_4$, $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$ tali che $\overline{ab} = \overline{0}$.

10). Sia $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ un'applicazione. Si provi che se $n > m$ allora f non è iniettiva, mentre se $n < m$ allora f non è suriettiva.

11). Stabilire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. ($\mathbb{R}_+$ denota l'insieme dei numeri reali non negativi).

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
ii. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$.
iii. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
iv. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$
v. $f : \mathbb{N} \to \{m \in \mathbb{N} \mid\ m \text{ è pari}\},\ f(n) = 2n$.

Nel caso iv. si determini $Im(f) \equiv f(\mathbb{Z})$, $f(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

12). Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x,\ g(x) = x^2$. Calcolare, se esiste, f^{-1}, g^{-1}. Calcolare poi $f \circ g$, $g \circ f$.

13). Siano $f : A \to B,\ g : B \to C$ due applicazioni. Si provi che se f, g sono iniettive allora anche $g \circ f$ è iniettiva. Si provi che se f, g sono suriettive allora anche $g \circ f$ è suriettiva.

Fornire un esempio in cui $g \circ f$ è iniettiva oppure suriettiva) anche se f, g non lo sono.

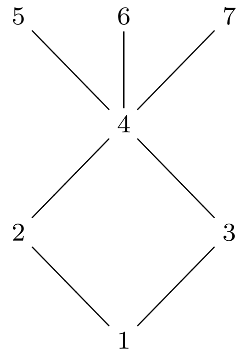
14). Sia ρ un ordinamento parziale. ρ^{-1} è ancora un ordinamento parziale ?

15). Si dica se le due seguenti relazioni $\leq, \leq'$ sono ordinamenti parziali su $\mathbb{Z}$:

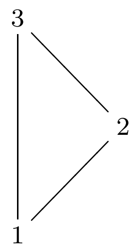
$$x \leq y \iff \exists a \in \mathbb{Z} : x + a = y$$
$$x \leq' y \iff \exists n \in \mathbb{N} : x + n = y$$

16). Si costruisca il diagramma di adiacenza della relazione di divisibilità sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Si determinino eventuali massimi, minimi, elementi massimali e minimali.

17). Si calcolino elementi massimali, minimali, massimi, minimi e le catene massimali dell'insieme parzialmente ordinato il cui diagramma di Hasse è



18). Determinare tutti i possibili ordinamenti parziali sull'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ e disegnare il relativo diagramma di Hasse. Esiste un ordinamente parziale su A il cui diagramma di Hasse è il seguente ?



19). Si provino, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, le relazioni seguenti.

i. $(1+k)^n \geq 1 + kn \quad \forall k \geq -1$.

ii. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

iii. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

20). Sia $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una collezione di sottoinsiemi di un insieme X. Si provi che $\mathcal{C}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}\left(A_i\right)$. ($\mathcal{C}(A)$ è il complementare di A in X).

21). Si provi che se X è un insieme finito con n elementi l'insieme delle parti di X, $\mathcal{P}(X)$, ha 2^n elementi mentre l'insieme S_X delle permutazioni di X ha $n!$ elementi.

22). (a) Si eseguano le seguenti divisioni col resto: 15 diviso 16, -15 diviso 16, 15 diviso -16, 1258 diviso 789.

(b) Si calcolino M.C.D. e m.c.m. di 458 e 164.

(c) Si scriva 98 nelle basi 2,3,11, 98, 99.

23). Sia $A \in M(n, m)$ e $I_k \in M(k, k)$ la matrice identità . Si provi che

$$A\, I_m = A, \qquad I_n\, A = A.$$

24). Si provi che ogni matrice quadrata di ordine n può scriversi come somma di una matrice tiangolare inferiore, una matrice diagonale e una triangolare superiore. Si provi poi che ogni matrice quadrata di ordine n può scriversi come somma di una matrice antisimmetrica e una triangolare superiore. Tale decomposizioni sono uniche ?

25). Verificare che la relazione di "equivalenza per righe" in $M(n,m)$ è effettivamente una relazione di equivalenza.

26). Calcolare il rango delle matrici seguenti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

27). Studiare i seguenti sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c - d + 5e - f - g = 1 \\ 2a + b + 2c - 4d + e - 4f - g = 0 \\ 4c - b - 3d + 2e - f + 2g = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

28) . Stabilire se

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

29). Si provi direttamente (senza usare la teoria del determinante) che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora

$$rk(A) = 2 \iff ad - bc \neq 0$$

30). Risolvere con l'eliminazione di Gauss e con il metodo di Cramer i sistemi lineari le cui matrici complete sono:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

31). Sia $A = (a_{ij}) \in M_{nn}$ una matrice triangolare superiore (o inferiore). Si provi che

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

32). Si calcoli il determinante della seguente matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

33). Si calcolino, se esistono, le inverse delle matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

34). Costruire, se possibile, un sistema lineare non omogeneo di cinque equazioni in sei incognite con ∞^2 soluzioni, e un sistema omogeneo di tre equazioni in due incognite con soluzione unica.

35). Si calcoli $\det(-A)$ in termini di $\det(A)$. Si deduca che una matrice antisimmetrica (tale cioè che $A = - \ {}^tA$) ha determinante nullo.

36). Supponiamo che $\det(A) = 4$: quanto vale $\det(A \ {}^tA \, A^{-1})$?

37). Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi vettoriali.
(a) $V = \mathbb{R}^3$.

(1) $W_1 = \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
(2) $W_2 = \{(x_1, 1, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$.
(3) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
(4) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.
(5) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$.

(b) $V = M_{n\,n}(\mathbb{R})$

(1) $U_1 = \{A \in V \mid \ {}^tA\,A = I_n\}$.
(2) $U_2 = \{A \in V \mid \ {}^tA = A\}$.
(3) $U_3 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -A\}$.
(4) $U_4 = \{A \in V \mid \ {}^tA = -2A\}$.
(5) $U_5 = \{A \in V \mid tr(A) = 0\}$.
(6) $U_6 = \{A \in V \mid tr(A) = 1\}$.
(7) $U_7 = \{A \in V \mid a_{11} = 0\}$.
(8) $U_8 = \{A \in V \mid n$ qualsiasi elementi sono nulli$\}$.
(9) $U_9 = \{A \in V \mid n$ fissati elementi sono nulli$\}$.
(10) $U_{10} = \{A \in V \mid a_{11}a_{22} = 0\}$.
(11) $U_{11} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i \leq j\}$.
(12) $U_{12} = \{A \in V \mid a_{ij} = 0 \ \forall\ i < j\}$.

(c) $V = \mathbb{R}_n[t]$

(1) $Z_1 = \{p \in V \mid deg(p) = n-2\}$.
(2) $Z_2 = \{p \in V \mid deg(p) \leq n-2\}$.
(3) $Z_3 = \{p \in V \mid deg(p) < n-2\}$.
(4) $Z_4 = \{p \in V \mid p(5) = 0\}$.
(5) $Z_5 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p(1) = 1\}$.
(6) $Z_6 = \{p \in V \mid p(0) = 0, p'(1) = 0\}$. $(p'(x) = \frac{dp}{dx})$.

38). Nell'esercizio precedente si ponga $n = 3$; si determinino generatori lineari per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

39). Nell'esercizio 37) si ponga $n = 3$; si determinino basi per i sottoinsiemi di V che sono sottospazi.

40). Si determinino basi per lo spazio delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei la cui matrice dei coeffcienti è

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

41). Stabilire in ogni caso se gli insiemi di vettori $v_1, v_2, \ldots$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.

(1) $V = \mathbb{R}^2, \quad v_1 = (1,3),\ v_2 = (2,4),\ v_3 = (-1,0)$.
(2) $V = \mathbb{R}^3, \quad v_1 = (1,0,3),\ v_2 = (-2,3,4),\ v_3 = (4,-1,0)$.
(3) $V = \mathbb{R}^4, \quad v_1 = (1,-1,1,-1),\ v_2 = (1,0,1,0)$.

(4) $V=\mathbb{R}^4$, $\quad v_1=(1,2,3,4),\, v_2=(1,2,0,0), v_3=(1,0,1,0),$
$v_4=(0,0,0,2),\, v_5=(1,1,1,1)$.

(5) $V=M_{2\,2}(\mathbb{R})$, $\quad v_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$

(6) $V=T_2^+$, $\quad v_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ v_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

(7) $V=S_3^-$, $\quad v_1=\begin{pmatrix}0&2&1\\-2&0&2\\-1&-2&0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$

(8) $V=sl(2)$ $\quad v_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$
$v_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}.$

(9) $V=\mathbb{R}_2[t]$, $\quad v_1=t+2t^2,\, v_2=1+t$.

42). Si considerino gli insiemi di vettori $v_1,v_2,\dots$ dell'esercizio 41; si determini, in ciascun caso, una base di $\mathcal{L}(v_1,v_2,\dots)$.

43). Si considerino gli insiemi di vettori $v_1,v_2,\dots$ dell'esercizio 41, parti 3,7,9. Si completino tali insiemi ad una base di V.

44). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=0\},\quad U=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \begin{cases}2x+y-z=0\\ y+z=0\end{cases}\right\}$$

(a) Si determinino basi per W,U.
(b) Si provi che $\mathbb{R}^3=W\oplus U$.

45). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1=(1,t,1,0),\quad w_2=(1,1,t,-1),\quad w_3=(-2,-2,-2,1),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Si determini la dimensione di S al variare del parametro t.

46). Siano $W_1,W_2\subseteq\mathbb{R}^3$ i sottospazi costituiti dalle soluzioni dei sistemi lineari omogenei associati alle matrici A_1,A_2 nell'es. 40). Si calcoli una base per $W_1\cap W_2$ e una base per W_1+W_2.

47). Si dimostri il teorema di Grassmann: se U,W sono sottospazi di dimensione finita di uno spazio vettoriale V, allora $dim(U+W)+dim(U\cap W)=dim(U)+dim(W)$. *[Suggerimento: si consideri una base di* $\{v_1,\dots,v_k\}$ *di* $U\cap W$ *e la si completi a una base di* U *tramite vettori* $u_1,\dots,u_s$ *e a una base di* W

tramite vettori $w_1, \dots w_t$. Si provi che $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots w_t\}$ è una base di $U + W$].

48) Stabilire quali delle applicazioni seguenti sono lineari.

(1) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
(2) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3)$.
(3) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2 x_3, x_1 - x_3)$.
(4) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_3 + x_2, x_2)$.
(5) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & a-d+c-b \end{pmatrix}.$$

(6) $F : S_2^+ \to \mathbb{R}^4$

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \\ a-c \end{pmatrix}.$$

(7) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_1 t + (a_1 - a_2 + a_0) t^3$.
(8) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0$.
(9) $F : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_3[t], \quad F(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = k$, ove k è una costante reale.

49). Determinare $Ker(F)$, $Im(F)$ per quelle, fra le applicazioni definite nell'esercizio 48, che sono lineari. In tali casi, dopo aver fissato basi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ per il dominio e il codominio do F, determinare ${}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}$.

50) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 2x_2 + x_4, x_4 - x_3, x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 - x_3).$$

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{C} = \{(1,2,3,4), (0,2,3,4), (0,0,3,4), (0,0,0,4)\}$. Dopo aver verificato che $\mathcal{C}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, determinare

$${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad {}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{C}}, \quad {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{B}}, \quad {}_{\mathcal{C}}[F]_{\mathcal{C}}.$$

51). Provare che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(F)$ ha per base i vettori $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e tale che $F((1,0,1)) = (2,3,4)$. Determinare la matrice di F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo. Dire, infine, se il vettore $(1,2,3)$ appartiene a $Im(F)$.

52). Sia T_4^+ lo spazio delle matrici 4×4 triangolari superiori a coefficienti reali. Esiste un 'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^9 \to T_4^+$? Esiste un'applicazione lineare iniettiva $g : T_4^+ \to \mathbb{R}_7[t]$? Sia S_4^+ lo spazio delle matrice reali simmetriche 4×4. Costruire, se esiste, un isomorfismo $h : T_4^+ \to S_4^+$.

53). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}, \quad U = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

(a) Si determinino basi per W, U.
(b) Si provi che $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$.
(c) Si determini la matrice associata all'operatore $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\pi(w + u) = w, \qquad w \in W, u \in U$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo.

54). Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio S generato dai vettori

$$w_1 = (1, t, 1, 0), \quad w_2 = (1, 1, t, -1), \quad w_3 = (-2, -2, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Si determini la dimensione di S al variare del parametro t.

b) Per $t = 1$ si costruisca un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Ker} f = S$.

55). Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Si scriva la matrice che rappresenta l'operatore f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b) Si determinino basi per $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$.

56). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V; sia poi W lo spazio delle matrici simmetriche 2×2.

(1) Si provi che esiste un unico operatore lineare $F : V \to W$ tale che

$$F(v_1 + v_2 + v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 \in Ker\, F, \quad F(v_1 - v_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Si trovi la matrice di F rispetto a B scelta come base di partenza in V e $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ scelta come di base di arrivo in W;

57). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Si considerino i seguenti sottospazi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = c = 0 \right\}, \qquad U_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{cases} ka - 2b + 2c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

(k è un parametro reale).

(1) Determinare $dim\, U_k$ al variare di k.
(2) Determinare $dim\,(W + U_k)$ al variare di k; nel caso $k = 0$ determinare una base di $W + U_0$.
(3) Determinare i valori di k per cui $V = W \oplus U_k$.

58). Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad V = Lin \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

(1) Si provi che $U = V$ e si determinino equazioni cartesiane per tale sottospazio.
(2) Sia $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$; si determini una base per $U \cap W$.

59). Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali 2×2. Si consideri l'operatore lineare $F : V \to V$ definito da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ kx_3 & kx_1 \end{pmatrix}$$

(k è un parametro reale).

Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di F al variare di k.

60). Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di ordine 2. Si determini una base per il sottospazio W generato dalle seguenti matrici

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si determini poi una base per $W \cap sl(2,\mathbb{R})$.

61). Provare che un gruppo con quattro elementi è abeliano.

62). (a) Dimostrare che se G è un gruppo abeliano, allora $a^n b^n = (ab)^n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, a, b \in G$.
(b) Se G è un gruppo in cui $a^2b^2 = (ab)^2\ \forall\, a, b \in G$, allora G è abeliano.

63). Provare che H è un sottogruppo di G nei casi seguenti

$$\begin{array}{ll} H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\} & G = GL_2(\mathbb{R}) \\ H = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\} & G = \mathbb{C}^* \\ H = \{\pi \in S_5 \mid \pi(5) = 5\} & G = S_5 \end{array}$$

64). Si provi che l'intersezioni di sottogruppi di G è un sottogruppo di G.

65). Siano S, T sottogruppi di G, sia $ST = \{st \mid s \in S,\ t \in T\}$. Si provi che ST è un sottogruppo di G se e solo se $ST = TS$ (Nota: la precedente è una uguaglianza di insiemi: in altri termini se $x = st$ con $s \in S$, $t \in T$, allora esistono $s' \in S$, $t' \in T$ tali che $x = t's'$ e simmetricamente se $x = t''s''$ allora $x = s'''t'''$).

66). In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le precedenti come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; precisarne infine il segno. Determinare $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\gamma$ e il loro ordine.

67). Si determini il sottogruppo di S_4 generato da $(1,2,3),(1,4)$. (Si ricordi che dato $X \subseteq G$, il sottogruppo $< X >$ generato da X è il più piccolo sottogruppo di G contenente X: $< X >= \bigcap\limits_{\substack{H \leq G \\ H \supseteq X}} H$).

68). Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:
(a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^2 >$.
(b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^5 >$.
(c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\}$.

69). Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine 13, 26, 35.

70). Si determinino i sottogruppi, i generatori e gli elementi (moltiplicativamente) invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{48}$, $\mathbb{Z}_{211}$.

71). Sia $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Si provi che C_n è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$.

72). Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.

73). (a) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un isomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.
(b) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.
(c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.

74). Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si provi che N è normale in G e che G/N è abeliano.

75). Per $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo $f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{ab}(x) = ax + b$.
Sia $G = \{f_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. G è abeliano ? Provare che $N = \{f_{1b} \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G. Determinare il quoziente G/N.

76). Nel gruppo additivo $(\mathbb{R}^2, +)$ si consideri il sottogruppo

$$H = \{(x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Si studi il quoziente G/H, determinando geometricamente i suoi elementi; si provi poi che G/H è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.