CORSO DI MATEMATICA III

Prof. Paolo Papi

ESERCIZI PROPOSTI

1) Per ciascuna delle seguenti funzioni f reali di due variabili reali:

a. determinare l'insieme di definizione D_f;

b. disegnare D_f;

c. stabilire se D_f è aperto, chiuso, ne' aperto ne' chiuso, limitato, compatto, connesso; determinarne i punti di frontiera e di accumulazione.

$$f(x,y) = e^{\arctan(xy)}$$
$$f(x,y) = \sqrt{-|\sin(x)|}$$
$$f(x,y) = \sqrt{-|\sin(x+y)|}$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{2} - |\sin(x+y)|}$$
$$f(x,y) = \frac{x^4 - 56y}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$
$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{2x^2 + 2y^2 - 6}{2x^2 + y^2 - 1}}$$
$$f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}\,\lg(xy+1)$$
$$f(x,y) = \frac{1}{x}\arcsin(x - 2y)$$
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{\lg(x^2 + y^2 - 3)}$$
$$f(x,y) = \sqrt{|x| - \sqrt{x-y}}$$
$$f(x,y) = e^{\cos(\sin(\arcsin(xy)))}$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y + x^2 + x}{x^2 - y^2 - 1}}$$
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y - \sqrt{e^x}}{y+1}}$$
$$f(x,y) = \sqrt{-|\sin(xy)|}$$

2) Dimostrare che se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una arbitraria collezione di aperti, allora $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ è aperto; provare poi che se I è un insieme finito, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ è aperto. Dimostrare che quest'ultimo risultato può non valere se I ha cardinalità arbitraria (suggerimento: generalizzare, nel piano, la seguente relazione in $\mathbb{R}$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$).

3) Dimostrare che la chiusura di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è l'unione di A e dei suoi punti di accumulazione:

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

4) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}.$$

5) Calcolare le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ per le funzioni dell'esercizio 4.

6) Studiare continuità e differenziabilità delle funzioni seguenti

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy)}{y} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2+y^2-|x-y|}{x^2+y^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7) Determinare i massimi e i minimi relativi su $\mathbb{R}^2$ delle funzioni seguenti

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (x-1)^2 + 2y^2 \\
f(x,y) &= (x-1)^2 - 2y^2 \\
f(x,y) &= x^2 + xy + y^2 - 2x - y \\
f(x,y) &= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \\
f(x,y) &= (x^2+y^2)e^{x^2+y^2} \\
f(x,y) &= \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\
f(x,y) &= e^{x-y}(x^2-2y^2) \\
f(x,y) &= \sin(xy) \\
f(x,y) &= \sin(x+y) \\
f(x,y) &= x^2 - \sin(y)
\end{aligned}
$$

8) Determinare massimo e i minimo assoluti:

$$
\begin{array}{ll}
f(x,y) = xy & \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\} \\
f(x,y) = x^2+y^2-x-y & \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1,\ |y|\le 1\} \\
f(x,y) = \sin(x+y)+\sin(x-y) & \text{su tutto } \mathbb{R}^2 \\
f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} & \text{su } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2 \le 1\}
\end{array}
$$

9) Determinare massimo e i minimo assoluti di $f(x,y) = bx + y$ (b è una costante reale) nell'insieme

$$
\begin{cases}
x \ge 0 \\
y \ge 0 \\
x + 2y \le 1 \\
2x + y \le 1
\end{cases}
$$

10) Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

$$
\begin{array}{ll}
y' = \dfrac{y^2}{x^2} & y' = (x+1)e^{-y} \\
y' = (1+y^2)\sin(x) & y' = e^x\cos^2(y) \\
y' + 2xy = x + x^3 & y' + y = \sin(x) + \cos(x) \\
y' + 2xy = xe^{-x^2} & y'' + 4y = e^x + 1 \\
y'' - y = 1 & y'' + y = \tan(x) \\
y'' - 2y' + y = x^2 & y'' + y = e^x\sin(x)
\end{array}
$$

11) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ay - by^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Calcolare poi $\lim_{x \to +\infty} y(x)$

12) Calcolare i seguenti integrali

$\int\int_D x^3 y dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\}$

$\int\int_D \sin(x)\cos(y) dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\}$

$\int\int_D x\sqrt{1+y^2} dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3\}$

$\int\int_D xy dxdy \qquad D =$ esagono regolare centrato nell'origine con due vertici sull'asse x, di lato 1

$\int\int_D xy dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 + \cos(y) \le x \le 1 - \cos(y),\ 0 \le y \le 2\pi\}$

$\int\int_D xy dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge x,\ x \le 0\}$

$\int\int_D (x + y^2) dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

$\int\int_D x^2 e^{-x^2-y^2} dxdy \qquad D =$ cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1

$\int\int_D \cos(x)\cos(y) dxdy \qquad D =$ triangolo di vertici $(0,0), (\pi,0), (0,\pi)$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$