

CORSO DI ALGEBRA

Prof. Paolo Papi

Introduzione alla teoria dei gruppi: ESERCIZI

- Provare che l'insieme $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto all'operazione così definita

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

- Siano (G_1, \square) , (G_2, \triangle) due gruppi. Provare che $G_1 \times G_2$ è un gruppo rispetto all'operazione $*$

$$(g_1, g_2) * (g'_1, g'_2) = (g_1 \square g'_1, g_2 \triangle g'_2)$$

Inoltre $(G_1 \times G_2, *)$ è abeliano se e solo se (G_1, \square) , (G_2, \triangle) lo sono.

- Provare che $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ è un sottogruppo di \mathbb{R}^3
- Sia G un gruppo. Provare che per ogni $a, b \in G$ le equazioni

$$ax = b, \quad xa = b$$

hanno soluzione unica in G .

- Scrivere la tabella di moltiplicazione del gruppo D generato da due elementi s, t tali che

$$s^4 = 1, \quad t^2 = 1, \quad ts = s^{-1}t$$

- Sia G un gruppo e $x, y \in G$. Provare che

(1) $y = xyx^{-1}$ se e solo se $xy = yx$;

(2) $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$;

(3) se $xyx^{-1} = y^2$, allora $x^3 y x^{-3} = y^8$.

- Sia $(G, *)$ un insieme dotato di un'operazione binaria $*$. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti

(1) $(G, *)$ è un gruppo;

(2) $*$ è associativa e vale la proprietà seguente

$$\forall a, b \in G \exists x, y \in G : ax = b, \quad ya = b.$$

[Questo è un esercizio più impegnativo: si provi anzitutto che dato $a \in G$ esiste un elemento $u \in G$ tale che $au = a$. Si dimostri poi che u verifica $xu = x \forall x \in G$. Analogamente si trovi u' tale che $u'x = x \forall x \in G$. Ora si dimostri che $u = u'$.

Dato ora a , si trovi a' tale che $aa' = u$ e a'' tale che $a''a = u$. Si provi che $a' = a''$ è l'inverso di a].

- Sia G un gruppo; si provi che G è abeliano se e solo se $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni $a, b \in G$.
- Sia G un gruppo; si provi che se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$ allora G è abeliano.
- Si provi che l'intersezione di sottogruppi di G è un sottogruppo di G .
- Si provi che un gruppo infinito ha infiniti sottogruppi.
- Siano S, T sottogruppi di G , sia $ST = \{st \mid s \in S, t \in T\}$. Si provi che ST è un sottogruppo di G se e solo se $ST = TS$ (Nota: la precedente è una uguaglianza di insiemi: in altri termini se $x = st$ con $s \in S, t \in T$, allora esistono $s' \in S, t' \in T$ tali che $x = t's'$ e simmetricamente se $x = t''s''$ allora $x = s'''t'''$).
- Provare che ogni sottogruppo non banale di \mathbb{Q} è infinito.
- Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di S_n è un sottogruppo

$$H_1 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1\} \quad H_2 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}.$$

- Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo e $x \in G$. provare che

$$xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

è un sottogruppo di G .

- Siano p, q due interi primi tra loro. Provare che il sottogruppo $\langle \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \rangle$ è ciclico generato da $\frac{1}{pq}$.
- Determinare esplicitamente nei seguenti gruppi, quando possibile, almeno un elemento $g \neq u$ di ordine finito

$$(\mathbb{Z}, +), \quad (\mathbb{Q}^*, \cdot), \quad (\mathbb{Q}, +)$$

- Provare che un gruppo di ordine 4 è abeliano ed esistono esattamente due tipi di tabelle moltiplicative per un tale gruppo (in altri termini, esistono solo due gruppi di ordine 4 a meno di isomorfismo).
- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Scrivere gli elementi di $U(25)$ e determinarne gli ordini. Costruire il (reticolo dei) sottogruppi.
- Determinare tutti i sottogruppi di \mathbb{Z}_{18} e le relative unioni e intersezioni.
- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Provare che $U(15)$ e $U(20)$ non sono ciclici. Determinare tutti i loro sottogruppi di ordine 4.

- Sia G un gruppo abeliano di ordine dispari. Provare che

$$\sum_{g \in G} g = 0$$

- Sia $U(n)$ il gruppo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n . Determinare $U(24)$, $U(16)$ e la loro tabella moltiplicativa. Determinare la tabella additiva di \mathbb{Z}_8 . Verificare se tali tabelle corrispondono allo stesso gruppo.
- Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:
 - (a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g , $H = \langle g^2 \rangle$.
 - (b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g , $H = \langle g^5 \rangle$.
 - (c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\}$.
- Si determinino i sottogruppi, i generatori e gli elementi (moltiplicativamente) invertibili di \mathbb{Z}_{20} , \mathbb{Z}_{48} , \mathbb{Z}_{211} .
- In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le precedenti come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; precisarne infine il segno. Determinare $\alpha\beta\gamma$, $\beta\alpha\gamma$ e il loro ordine.

- Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine 13, 26, 35.
- Qual'è il massimo ordine che può avere un elemento di S_{10} ?
- Quale delle seguenti applicazioni tra gruppi sono omomorfismi?
 - (1) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 1$.
 - (2) $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(x) = e^{3x}$.
 - (3) $f : S_5 \rightarrow S_5$, $f(\sigma) = g \circ \sigma$ ove g è la permutazione che scambia 1 e 3.
 - (4) $f : G \rightarrow G$, $f(x) = axa^{-1}$ ove a è un fissato elemento di G .
- Provare che $f : G \rightarrow G$, $f(g) = g^{-1}$ è un omomorfismo se e solo se G è abeliano.
- Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f(x, y) = 2x - 5y$.
- Provare che $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \forall x \in G\}$ è un sottogruppo normale di G . Chi è $Z(G)$ se G è abeliano?
- Sia $f : G \rightarrow H$ un omomorfismo non nullo di gruppi. Provare che se G ha ordine primo allora f è iniettivo. Provare che se H ha ordine primo allora H è suriettivo.

- Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.
- (a) Dimostrare che se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un omomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.
 (b) Dimostrare che se $\varphi : G \rightarrow G'$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.
 (c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.
- Calcolare il numero di omomorfismi iniettivi o suriettivi da:
 - (1) \mathbb{Z}_{12} a \mathbb{Z}_5
 - (2) \mathbb{Z}_{12} a \mathbb{Z}_6
 - (3) \mathbb{Z}_{12} a \mathbb{Z}_{12}

- Per $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo $f_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{ab}(x) = ax + b$.
 Sia $G = \{f_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. G è abeliano? Provare che $N = \{f_{1b} \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G . Determinare il quoziente G/N .
- Nel gruppo additivo $(\mathbb{R}^2, +)$ si consideri il sottogruppo

$$H = \{(x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Si studi il quoziente G/H , determinando geometricamente i suoi elementi; si provi poi che G/H è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.

- Provare che

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{4}\rangle \cong \mathbb{Z}_4 \quad \mathbb{Z}_{18}/\langle\bar{3}\rangle \cong \mathbb{Z}_3$$