1. Nel gruppo $\mathcal{S}_4$ costruire tutti i sottogruppi di ordine quattro e calcolare gli ordini possibili degli elementi e il numero dei sottogruppi ciclici per ciascun ordine possibile.

2. In $\mathbb{Z}_{459}$ determinare quali delle seguenti classi è un elemento invertibile:

$$\overline{289}, \quad \overline{91}, \quad \overline{816}, \quad \overline{25},$$

   Nel caso di elementi invertibili calcolarne l'inverso.

3. a) Determinare tutte le possibili strutture cicliche degli elementi di S_6 e, per ogni struttura ciclica, l'ordine di un elemento con quella struttura ciclica.

   b) Trovare, se possibile, in S_6 due sottogruppi H e K di ordine quattro, non isomorfi tra loro.

4. Date le seguenti permutazioni:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

   Si chiede di:

   1) scrivere ognuna di esse come prodotto di cicli disgiunti e, se possibile, come prodotto di trasposizioni in almeno due modi diversi

   2) determinare per entrambe l'ordine e l'inversa

   3) dire se sono di classe pari o dispari

   4) verificare se sono coniugate

   5) calcolare i due prodotti $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$

   6) verificare che le due permutazioni $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono coniugate e dimostrare che questo accade per ogni coppia di permutazioni.

5. Siano $G = U(\mathbb{Z}_{15})$ il gruppo moltiplicativo degli invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$ e $G' = U(\mathbb{Z}_{16})$ il gruppo moltiplicativo degli invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$; si chiede di:

   1) dimostrare, senza scrivere gli elementi dei due gruppi, che $|G| = |G'|$,

   2) scrivere gli elementi dei due gruppi e verificare se tali gruppi sono o non sono ciclici,

   3) stabilire se G è isomorfo a G' e, in caso affermativo, esplicitare un isomorfismo fra i due gruppi.

6. Date le seguenti permutazioni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

a) scrivere ciascuna di esse come prodotto di cicli disgiunti, determinarne l'ordine e la classe,

b) calcolare, $\forall\ i, j \in \{1, 2, 3\}\ i \neq j$, tutti i possibili prodotti $\sigma_i \circ \sigma_j$,

c) verificare se fra tali prodotti esiste una coppia di elementi coniugati; in tal caso determinare una permutazione che li coniughi,

d) è sempre vero che, $\forall\ \sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono elementi coniugati?

7. Stabilire se esistono permutazioni:

   a) di ordine 10 in S_8 e di classe pari,

   b) di ordine 10 in S_8 e di classe dispari,

   c) di ordine 10 in S_9 e di classe pari;

   in caso di risposta affermativa fornire esplicitamente un esempio.

8. Stabilire, motivando le risposte, se i gruppi $\mathcal{S}_6$ e $\mathcal{S}_7$ contengono un sottogruppo H ciclico di ordine 12 e/o un sottogruppo K non ciclico di ordine 12.

   In caso affermativo esplicitare gli elementi di tali sottogruppi.

9. Date le seguenti permutazioni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

   Si chiede di:

   1) scrivere ognuna di esse come prodotto di cicli disgiunti e, se possibile, come prodotto di trasposizioni in almeno due modi

   2) determinare per entrambe l'ordine e l'inversa

   3) dire se sono di classe pari o dispari

   4) verificare se sono coniugate

   5) calcolare i due prodotti $\sigma_1 \circ \sigma_2$ e $\sigma_2 \circ \sigma_1$.