CORSO DI ALGEBRA
Prof. Paolo Papi
ESERCIZI di TEORIA DEI GRUPPI

1). Provare che un gruppo con quattro elementi è abeliano.

2). (a) Dimostrare che se G è un gruppo abeliano, allora $a^n b^n = (ab)^n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, a, b \in G$.
(b) Se G è un gruppo in cui $a^2 b^2 = (ab)^2\ \forall\, a, b \in G$, allora G è abeliano.

3). Provare che H è un sottogruppo di G nei casi seguenti

$$\begin{array}{ll} H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\} & G = GL_2(\mathbb{R}) \\ H = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 1\} & G = \mathbb{C}^* \\ H = \{\pi \in S_5 \mid \pi(5) = 5\} & G = S_5 \end{array}$$

4). Si provi che l'intersezioni di sottogruppi di G è un sottogruppo di G.

5). Siano S, T sottogruppi di G, sia $ST = \{st \mid s \in S,\ t \in T\}$. Si provi che ST è un sottogruppo di G se e solo se $ST = TS$ (Nota: la precedente è una uguaglianza di insiemi: in altri termini se $x = st$ con $s \in S$, $t \in T$, allora esistono $s' \in S$, $t' \in T$ tali che $x = t's'$ e simmetricamente se $x = t''s''$ allora $x = s'''t'''$).

6). In S_8 si considerino le permutazioni seguenti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Scrivere le precedenti come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni; precisarne infine il segno. Determinare $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\gamma$ e il loro ordine.

7). Si determini il sottogruppo di S_4 generato da $(1, 2, 3), (1, 4)$. (Si ricordi che dato $X \subseteq G$, il sottogruppo $< X >$ generato da X è il più piccolo sottogruppo di G contenente X: $< X > = \bigcap_{\substack{H \leq G \\ H \supseteq X}} H$).

8). Scrivere esplicitamente i laterali destri di H in G nei casi seguenti:

(a) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^2 >$.
(b) G gruppo ciclico di ordine 10 generato da g, $H =< g^5 >$.
(c) $G = S_4$, $H = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\}$.

9). Si provi che S_{15} ha almeno un sottogruppo di ordine 13, 26, 35.

10). Si determinino i sottogruppi, i generatori e gli elementi (moltiplicativamente) invertibili di $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{48}$, $\mathbb{Z}_{211}$.

11). Sia $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Si provi che C_n è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$.

12). Provare che l'isomorfismo tra gruppi è una relazione di equivalenza.

13). (a) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un isomorfismo, e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.
(b) Dimostrare che se $\varphi : G \to G'$ è un isomorfismo e $g \in G$ ha ordine finito, allora $o(g) = o(\varphi(g))$.
(c) Determinare tutti gli isomorfismi tra due gruppi ciclici dello stesso ordine.

14). Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R},\ ad \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si provi che N è normale in G e che G/N è abeliano.

15). Per $a, b \in \mathbb{R}$ definiamo $f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{ab}(x) = ax + b$.
Sia $G = \{f_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che G è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. G è abeliano ? Provare che $N = \{f_{1b} \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G. Determinare il quoziente G/N.

16). Nel gruppo additivo $(\mathbb{R}^2, +)$ si consideri il sottogruppo

$$H = \{(x, 5x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Si studi il quoziente G/H, determinando geometricamente i suoi elementi; si provi poi che G/H è isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.