

**ESERCIZI DEL CORSO DI MATEMATICA PER LA LAUREA IN STATISTICA,
ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI.**

1. VENERDÌ 28 FEBBRAIO

1.1. **Esercizi svolti in classe.**

- (1) (a) Quante sono le possibili targhe formate da 7 simboli, di cui i primi 2 sono lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere) e gli ultimi 5 sono cifre? (b) Stessa domanda supponendo ora che i simboli siano tutti distinti.
- (2) 6 studenti, di cui 3 ragazze e 3 ragazzi, devono sedersi in prima fila. (a) In quanti modi possono farlo? (b) In quanti modi possono farlo se sia i maschi che le femmine devono sedere vicini tra loro? (c) In quanti modi possono farlo se i maschi devono sedere vicini tra loro?
- (3) Calcolare il numero dei possibili anagrammi di MARCO. Stesso problema con gli anagrammi di ALESSANDRA.
- (4) Si consideri un gruppo di 20 persone. Quante sono le strette di mano se ciascuno dà la mano a tutti gli altri? Equivalentemente, quanti sono i lati di un grafo completo di 20 vertici?
- (5) Dalla classe di 128 studenti bisogna scegliere un rappresentante e 2 segretari. In quanti modi lo si può fare?
- (6) Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventualmente massimo, minimo dei seguenti insiemi:
 - (i) $\left\{ \frac{|5-n|}{n+3} : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$
 - (ii) $\left\{ \frac{(-1)^n}{1+n^2} : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$
 - (iii) $\left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}$

1.2. **Esercizi assegnati per casa.**

- (1) Calcolare il numero dei possibili anagrammi del proprio nome.
- (2) Con riferimento all'esercizio (2) svolto in classe, calcolare numero di modi in cui si possono sedere i 6 studenti se due studenti dello stesso sesso non possono stare vicini.
- (3) Calcolare in quanti modi si possono sistemare su di uno scaffale 3 romanzi, 2 testi di matematica e uno di chimica (tutti libri distinti tra loro) se (a) i libri si possono sistemare in qualunque modo; (b) i testi di matematica vanno messi vicini fra loro e i romanzi vanno messi vicini fra loro; (c) i romanzi vanno messi vicini fra loro e gli altri libri si possono sistemare liberamente. Si supponga ora di scegliere 4 libri tra quelli sullo scaffale per leggerli durante un lungo viaggio in treno. (d) In quanti modi si possono scegliere i 4 libri?
- (4) Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventualmente massimo, minimo dei seguenti insiemi:

- (i) $\left\{ \frac{3+2n}{n+3} : n = 1, 2, \dots \right\}$
 (ii) $\left\{ \frac{x}{x-1} : x > 1 \right\}$

2. VENERDÌ 7 MARZO

Corretti esercizi assegnati per casa.

2.1. Esercizi svolti in classe.

- (1) Dimostrare per induzione che la somma dei primi n numeri naturali dispari è n^2 .
- (2) Dimostrare per induzione su $n = 0, 1, 2, \dots$ che si ha $2^n \leq (n+1)!$
- (3) Verificare in base alla definizione che si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-2}{2n+5} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty,$$

- (4) Dire se la successione $a_n = n(1 + (-1)^n)$ è limitata, ha limite e in caso affermativo calcolarlo.

2.2. Esercizi assegnati per casa.

- (1) Si consideri la funzione $f(x) = 4x - 3$ definita per $x \in \mathbb{R}$. Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventualmente massimo, minimo di $f(X)$ con $X = (1, 10]$
- (2) Si consideri la funzione $f(x) = x(x-2)(x-3)$ definita per $x \in \mathbb{R}$. Determinare estremo superiore, estremo inferiore ed eventualmente massimo, minimo di $f(\mathbb{N})$ con $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$
- (3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = ax + b$ con a, b numeri reali. Usando l'induzione trovare l'espressione dell'iterata n -esima $f^{(n)}(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x)$ (n volte)
- (4) Dimostrare che $2n \leq 2^n$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$
- (5) Verificare in base alla definizione che si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + (-1)^n}{3n^2} = \frac{5}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{5-n} = -\infty.$$

- (6) Dire se la successione $b_n = \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ è limitata, ha limite e in caso affermativo calcolarlo.

3. VENERDÌ 14 MARZO

Corretti esercizi assegnati per casa.

3.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Calcolare i limite delle seguenti delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n^4 - 3n + 4}{n^2 + 2n}$$

$$a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{(n + 2)^6 - (n - 3)^6}{(n + 1)^5}$$

(2) Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)^{n^2}$

3.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Calcolare i limite delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n - \sin n}{3n^3 + 2}$$

$$a_n = \left(\frac{|\cos n|}{n + 2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$a_n = (5 + \sin n)^n$$

$$a_n = \left(\frac{4 + \sin n}{10}\right)^n$$

$$a_n = (n + 2)^{\frac{1}{3}} - n$$

$$a_n = (3/5)^n$$

$$a_n = 6^n$$

$$a_n = n^{-\frac{5}{n}}$$

$$a_n = (n^2 - 4) \sin(5/n^2)$$

4. VENERDÌ 21 MARZO

Corretti esercizi assegnati per casa.

4.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$.

(2) Determinare se la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ha limite e in caso affermativo calcolarlo.

4.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = b$ per ogni a, b con $0 < a \leq b$.

(2) Sia $(a_n)_{n \geq 1}$ una successione a valori non nulli tale che esiste il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$. Dimostrare che

$$\begin{cases} \lambda < 1 & \Rightarrow a_n \rightarrow 0, \\ \lambda > 1 & \Rightarrow |a_n| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

(3) Calcolare i limite delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b > 0$$

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}$$

$$a_n = \frac{n^{n/2}}{n!}.$$

(4) Provare che se una successione a_n ha limite non nullo, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

(5) Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il limite della successione $a_n := 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-1}$, $n \geq 1$.

(6) Dimostrare che una successione a_n a termini non negativi non puo' avere limite che sia un numero negativo o $-\infty$

5. VENERDÌ 27 MARZO

Corretti esercizi assegnati per casa.

5.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Usando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + 1/x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \log\left(1 + \frac{1}{3x^2 + 1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{1+3x}}{x}$$

(2) Usando il limite notevole $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ for $a > 1, b > 0$, calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow \infty} (5 \cdot 4^x - x^3 + 6x)$

5.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Dire se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ giustificando la risposta.

(2) Calcolare quando esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x^2}{x^5 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

6. MERCOLEDÌ 2 APRILE

Corretti esercizi assegnati per casa.

6.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(2x^2 + x + 3)}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x}{\log(3x^{10} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

(2) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+2}$

6.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Calcolare quando esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log[(x+5)^{\frac{1}{5}}]}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log[(x+1)^{\frac{1}{5}}]}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5x+2}\right)^{4x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x - 1}{3x^2 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^3 x + x^2}$$

7. VENERDÌ 4 APRILE

Corretti esercizi assegnati per casa.

7.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni dove $a > 0$:

$$f(x) = \sqrt{x} \sin x, \quad x > 0$$

$$f(x) = \log_a x, \quad x > 0$$

$$f(x) = \log_x a, \quad x > 0$$

$$f(x) = (x^2 + 4x - 3)^5$$

$$f(x) = x^x, \quad x > 0$$

- (2) Dimostrare che $e^x \geq 1 + x$ per ogni $x \geq 0$ usando le proprietà delle derivate.
 (3) Dimostrate la disuguaglianza di Bernoulli $[(1+x)^n \geq 1+nx$ per $x \geq 0$] usando le proprietà delle derivate.

7.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Calcolare i seguenti limiti, se esistono:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{\sin^2 x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\cos x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

(2) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 2^{x^2}$$

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x^2 + 3x + 1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x > 1$$

8. LUNEDÌ 7 APRILE

Corretti esercizi assegnati per casa.

8.1. Esercizi svolti in classe.

(1) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$f(x) = \tan x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

(2) Verificare che la funzione $e^x - x$ è strettamente crescente su $[0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente su $(-\infty, 0]$. Inoltre determinare la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(1, e - 1)$.

(3) Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}$.

(4) Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^4 - x^2, x \in \mathbb{R}$.

8.2. Esercizi assegnati per casa.

(1) Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 2(\tan x)^2 + 3, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

$$f(x) = \log_{3x+1}(x^2 + 5), \quad x > -1/3.$$

(2) Studiare il grafico delle seguenti funzioni definite su \mathbb{R} a meno di indicazione contraria:

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = 4(x+1)(x-2)(x-4),$$

$$f(x) = \sin(3x),$$

$$f(x) = \frac{3x-4}{x+1} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

(3) Di tutti i rettangoli di area 25 cm^2 trovare quello di perimetro minimo e quello di perimetro massimo (se esistono)

9. MERCOLEDÌ 11 APRILE

Corretti esercizi assegnati per casa.

9.1. Esercizi assegnati per casa.

(1) Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x},$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3},$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} e^{-x},$$

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

10. MERCOLEDÌ 7 MAGGIO

10.1. Esercizi assegnati per casa.

(1) Determinare i seguenti integrali indefiniti

$$\int 2^x dx,$$

$$\int a^x dx, \quad a > 0,$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx,$$

$$\int x^2 e^x dx,$$

$$\int x \log x dx.$$

(2) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_1^3 \frac{5}{4x^2+4x+1} dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$$

11. VENERDÌ 9 MAGGIO

11.1. Esercizi assegnati per casa.

(1) Determinare i seguenti integrali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+3x+4} dx$$

$$\int \frac{5x+2}{x^2+x+2} dx$$

$$\int \frac{x^5+4}{x^2+2x+3} dx$$

$$\int \frac{x^7+8x^4-x^3}{x+1} dx$$

12. LUNEDÌ 12 MAGGIO

12.1. Esercizi assegnati per casa.

(1) Determinare i seguenti integrali usando la formula di integrale per sostituzione:

$$\int \frac{(\log x)^3}{x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{e^{3x} + e^{2x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x + \sqrt{x}} dx$$

$$\int_0^{3\pi/2} (\cos x)^2 \sin x dx .$$

(2) Determinare i seguenti integrali impropri:

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} dx$$

(3) Verificare che, dato $p > 0$, $\int_0^1 x^{-p} dx$ è finito se e solo se $p < 1$.