

Algebra 1
Prof. P. Papi
Esercitazione in classe

Esercizio 1. Dire per quali valori dei parametri interi α e β il sistema

$$\begin{cases} \alpha x \equiv 8 \pmod{14} \\ x \equiv 2\beta \pmod{6} \end{cases}$$

ha soluzioni.

Esercizio 2. Sia \mathbb{F}_2 il campo con due elementi. Sia G l'insieme delle applicazioni $g : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ della forma $g(v) = Av + w$ con $A \in GL(2, \mathbb{F}_2)$ e $w \in \mathbb{F}_2^2$. Dimostrare che

1. G è un gruppo rispetto alla composizione.
2. G è isomorfo al gruppo S_4 delle permutazioni su un insieme con 4 elementi.

Esercizio 3. Sia G un gruppo; poniamo $D = \{(g, g) \mid g \in G\}$

1. Dimostrare che D è un sottogruppo di $G \times G$.
2. Dimostrare che D è un sottogruppo normale di $G \times G$ se e solo se G è abeliano.
3. Dimostrare che se G è abeliano, allora $G \times G/D \cong G$.

Esercizio 4. Siano M, N sottogruppi normali di un gruppo G . Dimostrare che $G/M \cap N$ è isomorfo a un sottogruppo di $G/M \times G/N$

Esercizio 5. Dimostrare che \mathbb{Q} non ha sottogruppi propri di indice finito.