

ALGEBRA - ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

18 Ottobre 2007

1. Calcolare il massimo comun divisore $d = (4617, 6878)$ e scrivere la relativa identità di Bézout. Determinare poi l'inverso di 4617 in \mathbb{Z}_{6878}
2. Ricordando le proprietà che caratterizzano i sottogruppi determinare tutti i sottogruppi del gruppo (\mathbb{U}_{12}, \cdot)
3. Considerato il gruppo $G = (\mathbb{Z}_{3762}, +)$ ricordare la condizione per cui una classe $\bar{a} \in G$ appartenga al gruppo $G' = (\mathbb{U}_{3762}, \cdot)$.

Dire quali fra i seguenti elementi appartengono a G' :

$$\overline{95}, \overline{1847}, \overline{4}, \overline{1859},$$

e determinarne, quando possibile, l'inverso.

4. Determinare tutti i sottogruppi dei gruppi $\mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{36}, \mathbb{Z}_{60}$ le relative unioni e intersezioni, disegnare il reticolo di tali sottogruppi.
5. Dire se i seguenti gruppi sono ciclici: $\mathbb{U}_{15}, \mathbb{U}_{32}, \mathbb{U}_{36}$. In caso affermativo determinare il reticolo dei sottogruppi
6. Verificare che $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{a}, \bar{b}) \mid \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_3\}$ è un gruppo di ordine 9 rispetto all'operazione

$$(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}', \bar{b}') = (\bar{a} + \bar{a}', \bar{b} + \bar{b}')$$

Dire se tale gruppo è ciclico.