Esercitazione del 16 aprile

Individuare le risposte corrette, che possono essere più di una.

(1) Risulta $\binom{2n}{n} =$
- $n!$
- $\frac{2}{n!}$
- $\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 1}$
- $\frac{2^n}{n!}$

(2) Sia $E = [0,1] \cup \{3\} \cup (5,8)$. Sia E' l'insieme dei punti di accumulazione di E.
- $\{1,3,7\} \subset E'$.
- E non è né aperto né chiuso.
- E' è chiuso.
- $(E \cup E') \setminus (E \cap E')$ è un insieme finito

(3) Siano $b_n = \frac{\pi}{2}\frac{n^4}{n^4+1}$, $a_n = \sin b_n$, $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Allora
- b_n è decrescente
- a_n è definitivamente decrescente
- $\inf A = \sqrt{2}/2$
- A ha minimo

(4) Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = 12$. Allora
- $a_n > 11$ per ogni n
- tutti i termini della successione sono positivi.
- esiste in intorno limitato di 11 cui appartengono definitivamente tutti i termini della successione
- ogni intorno di 12 contiene definitivamente tutti i termini della successione

(5) Risulta $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x)}{x} =$
- 0
- 1
- $\sin(1)$

(6) Sia $f(x) = x^{2x}$. Allora
- $f'(x) = 2x \cdot x^{2x-1}$
- $f'(x) = x^{2x}(2 + 2\mathrm{Log}[x])$
- Il dominio naturale di f è $[0, +\infty)$.
- $f(x) > 0 \; \forall\, x > 0$

(7) Sia $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
- f è limitata
- f è continua ove è definita
- La retta di equazione $y + x = 0$ è un asintoto per f.

(8) Sia $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- f ha massimo in $[0,2]$
- f ha uno zero in $[-2,2]$
- f ha minimo assoluto nel suo dominio naturale

(9) Sia $b \neq 0$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{bx} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

- f è continua in 1 per ogni valore di $a, b, b \neq 0$
- f ha una discontinuità eliminabile in 0 per ogni valore di $a, b, b \neq 0$
- f è continua in 0 se e solo se $a = b$

(10) Sia $f(x) = \begin{cases} x^n \sin(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

- f è continua in 0 per $n > 0$
- f è derivabile con derivata continua in 0 per $n > 1$
- f è derivabile con derivata continua in 0 se e solo se $n \geq 3$

Risolvere, fornendo soluzioni dettagliate, i seguenti esercizi

(a). Calcolare il limite della seguente successione: $a_n = \frac{2^n + n^3}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

(b). Calcolare quando esistono i seguenti limiti:

(1)
$$\lim_{x \to 0^+} x^2 e^{1/\sin x}$$

(2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^5}}{[1-\cos(3x)]^2}$$

(c). Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$$