PROVA SCRITTA DI ALGEBRA (Informatica) DEL 11-9-06

NOME COGNOME

Esercizio 1 (a) Determinare il reticolo dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}_{245}, +)$. Scrivere la tabella moltiplicativa del gruppo quoziente $\mathbb{Z}_{245}/H$, ove H è il sottogruppo proprio di ordine massimo di $\mathbb{Z}_{245}$.
(b) Determinare l'inverso moltiplicativo di $\overline{13}$ in $\mathbb{Z}_{27}$.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che ogni gruppo G di ordine minore o uguale a 5 è abeliano.
(b) Nel gruppo simmetrico S_{10} si cosideri la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 10 & 4 & 6 & 8 & 9 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinare ordine e parità do σ; calcolare poi σ^{-1}.
(c) Determinare tutti gli interi k (se esistono) tali che σ^k ha ordine 2.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'operatore lineare $S : V \to V$ definito da

$$S(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2.$$

(a) Scrivere la matrice di S rispetto alla base $\{1, t, t,^2, t^3\}$ di V.
(b) Determinare una base di $Ker(S)$ e una base di un sottospazio U tale che $V = Ker(S) \oplus U$.
(c) Discutere la diagonalizzabilità di S.