Algebra, 9-1-2003

Esercizio 1 Sia W il piano per l'origine di $\mathbb{R}^3$ ortogonale alla retta passante per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) (3 punti) Determinare una base per W.

(b) (1 punto) Provare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) (1 punto) Sia M_2 lo spazio delle matrici quadrate reali 2×2. Provare che esiste un'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to M_2$ tale che $Ker(F) = W$ e $F(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) (4 punti) Calcolare $F(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$.

Esercizio 2 (9 punti) Si consideri l'operatore lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $L_A(X) = AX$, ove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori del parametro reale a per cui L_A è diagonalizzabile.

Esercizio 3 Sia $G = S_9$ il gruppo simmetrico su 9 elementi. Poniamo $a = (1,3,5)(1,2)$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) (2 punti) Calcolare $x := a^{-1}ba$.

(b) (2 punti) Determinare il sottogruppo ciclico H di G generato da x.

(c) (2 punti) Costruire un isomorfismo $H \to \mathbb{Z}_n$, per un opportuno n.

(d) (2 punti) Determinare tutti i sottogruppi di H.

Esercizio 4 (a) (2 punti) Definire l'ordine di un elemento g di un gruppo G. Dare un esempio di gruppo infinito non abeliano.

(b) (6 punti) Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $dim(V) = n$ e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che $n = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$.