Esercizio 1 Nel gruppo simmetrico S_6 si considerino le seguenti permutazioni $\sigma_1 = (1234)(56)$, $\sigma_2 = (42)(365)$, $\sigma_3 = (35)(256)(34)(16)$ e $\sigma_4 = (163)(153)(264)$; si chiede:

1. quali fra loro sono coniugate? Se due di esse sono coniugate si scriva un elemento di S_6 che le coniuga.

2. quali fra loro generano sottogruppi contenuti in A_6?

3. quali fra loro generano sottogruppi fra loro isomorfi?

Esercizio 2 Nel gruppo $(\mathbb{U}_{28}, \cdot)$ si determinino, se possibile, due sottogruppi S e T rispettivamente di ordine 3 e 4.

Per gli eventuali sottogruppi trovati si scrivano le relative partizioni in classi laterali destre e sinistre.

Quando sia possibile si costruisca il gruppo quoziente di $\mathbb{U}_{28}$ modulo il sottogruppo trovato e si dica se tale gruppo quoziente è isomorfo ad uno dei gruppi seguenti, esplicitando l'isomorfismo:

$$(\mathbb{U}_6, \cdot), (\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{U}_8, \cdot), (\mathbb{Z}_4, +).$$

Esercizio 3 Sia $V = \mathbb{R}_3[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 e W quello delle matrici reali quadrate 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $F : V \to W$

$$F(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + 2b - c + d & 3a + 4b + c + 2d \\ a + 3c & a - 2b + 7c - d \end{pmatrix}$$

1. Si determini la matrice A di F rispetto alla base $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ presa come base di partenza in V e alla base

   $$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   presa come base di arrivo in W.

2. Si determinino basi di $Ker(F)$ e $Im(F)$.

3. Sia U il sottospazio di W formato dalle matrici simmetriche. Si determini una base di $U \cap Im(F)$.

Esercizio 4 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ determinata dalle condizioni seguenti:

$$Ker(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0 \},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^4$.

2. Determinare gli autovalori di A e verificare se tale matrice è diagonalizzabile.

3. Determinare un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = Ker(f) \oplus U$.