CORSI DI LAUREA IN INFORMATICA
E TECNOLOGIE INFORMATICHE

Algebra
4–9–2003

NOME COGNOME CORSO DI LAUREA

1.

2.

3.

4.

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Sia $F : V \to V$ l'operatore lineare definito da $F(X) = X - X^t$.

(a) Determinare basi per $Ker(F)$ e $Im(F)$.

(b) Dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 2. (a) Si determini un'equazione cartesiana della retta r perpendicolare e incidente alla retta $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$ e passante per il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sia r_0 la retta parallela ad r passante per l'origine. Si provi che esiste un unico operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(F) = r_0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per F di autovalore 2 e $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Si verifichi poi che la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo è $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Dire se A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. (a) Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.
Definire le nozioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(b) Si provi che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$.

Esercizio 4. Data una matrice invertibile $n \times n$ a coefficenti reali A e un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, sia $T_{A,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione definita da

$$T_{A,b}(X) = AX + b.$$

Sia poi G l'insieme delle applicazioni $T_{A,b}$ al variare di A in $GL(n)$ e di b in $\mathbb{R}^n$.

(a) Provare che G è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni. Provare poi che G è infinito e non è abeliano.

(b) Provare che le trasformazioni $T_{A,b}$ che sono lineari formano un sottogruppo di G.

(c) Si ponga $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = 0_{\mathbb{R}^3}$. Si calcoli l'ordine di $T_{A,b}$.