FACOLTA' DI SCIENZE
MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Algebra
5–6–2003

NOME COGNOME CORSO DI LAUREA

1.

2.

3.

4.

Esercizio 1. Sia V lo spazio delle matrici reali simmetriche 3×3. Si considerino i seguenti sottospazi

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_4 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{array} \right. \right\}, \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Determinare basi per U e W.

(b) Determinare basi per $U \cap W$ e $U + W$.

(c) Completare la base di $U + W$ determinata nella parte (b) a una base di V.

(d) Determinare un intero n per cui esiste un isomorfismo tra $U \cap W$ e $\mathbb{R}^n$. Scrivere poi un tale isomorfismo.

Esercizio 2. (a) Si determini un'equazione cartesiana del piano π contenente la retta $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ e passante per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Sia v l'unico vettore normale a π con coordinate non negative e lunghezza $\sqrt{2}$. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle condizioni seguenti

$$F(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 3v, \quad F(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2v, \quad F(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = v.$$

Verificare che la matrice di F rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$ presa come base di partenza e di arrivo è $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Determinare basi per $Ker(F)$ ed $Im(F)$.

(d) Calcolare gli autovalori ed autovettori di F. Dire, motivando la risposta, se F è diagonalizzabile.

Esercizio 3. (a) Definire la nozione di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V.
Definire le nozioni di autovalore ed autovettore per un operatore lineare $F : V \to V$.

(b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori in V linearmente indipendenti, con $k < n$. Si provi che esistono vettori $v_{k+1}, \ldots, v_n$ in V tali che $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ è una base di V.

Esercizio 4. (a) Provare che l'insieme delle matrici $D = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z}_n \right\}$ formano un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. (Suggerimento: posto $u_{k,+} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_{h,-} = \begin{pmatrix} -1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare i prodotti $u_{k,\alpha} u_{h,\beta}$, $\alpha, \beta \in \{+, -\}$).

(b) Calcolare l'ordine di D e dire se D è abeliano.

(c) Calcolare l'ordine e determinare tutti i generatori per il sottogruppo ciclico generato da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.