**Esercizio 1** (a) Determinare l'inverso moltiplicativo di $\overline{17}$ in $\mathbb{Z}_{25}$.

(b) Dimostrare che il gruppo $\mathbb{U}_{23}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{23}$ è ciclico. Determinare il reticolo dei sottogruppi.

(c) Dimostrare che il gruppo $\mathbb{U}_{16}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{16}$ non è ciclico e determinarne i sottogruppi di ordine 4.

**Esercizio 2.** Nel gruppo simmetrico $S_7$ si considerino gli elementi

$$\alpha = (1,5,4,7)(5,2),\ \beta = (1,5,6,7,3)(1,5),\ \gamma = (1,2,3)(4,5,6,7).$$

Calcolare $\alpha^{12388267345472365456 5}\beta^{241}\gamma^{2349}$.

(b) Determinare le strutture cicliche degli elementi di $S_7$.

(c) Trovare un sottogruppo non abeliano di ordine 120 in $S_7$.

**Esercizio 3.** Sia $V$ lo spazio vettoriale delle matrici reali $3 \times 2$.
(a) Dimostrare che

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio di $V$ e determinarne una base. Completare tale base a una base di $V$.
(b) Sia $W_1$ il sottospazio di $W$ generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ e $W_2$ quello generato da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Determinare basi per $W_1, W_2$.
(c) Determinare basi per $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$.

**Esercizio 4.** Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice di $F$ rispetto alla base standard presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare basi per $Ker(F)$, $Im(F)$.

(c) Dire se $F$ è diagobalizzabile su $\mathbb{R}$.