Prova di *Matematica secondo corso* per la Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni
Esame del 19/06/2014; traccia delle soluzioni

QUESITO 1. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{2}{3}\right)^n = 8$ (si ricordi che se $|x| < 1$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1$). Altri risutati: $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 10$, $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{3}{4}\right)^n = 12$. $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{4}\right)^n = 9$.

QUESITO 2. La successione $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$. converge a $1/2$ per $n \to +\infty$. Inoltre $-\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1} \to -1/2$, $\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2+1} \to 1/2\sqrt{2}$, $\sqrt{3n^2+n} - \sqrt{3n^2+1} \to 1/2\sqrt{3}$

QUESITO 3. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = 1/2$, poichè una primitiva per $\frac{\sin x}{(\cos x)^3}$ è $\frac{1}{2\cos^2(x)}$. Risulta poi $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = 3/2$, $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = 1/6$, $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = 4/3$

QUESITO 4. Risulta $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2}\right)^{-(x+1)^2} = e^5$. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{7}{x^2}\right)^{-(x+2)^2} = e^7$, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{-(2x+1)^2} = e^{12}$, $\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{6}{x^2}\right)^{-(3x+1)^2} = e^{54}$

QUESITO 5. Il problema di Cauchy $x'(t) = 7x(t) + \sin t$ con condizione iniziale $x(0) = 1$ ha un'unica soluzione.

QUESITO 6. Se $f(x) = x^2 \cos x - x^{1/3}$, risulta $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2 \sin(x) 1/3 x^{-2/3}$

PROBLEMA 1 Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^3/(x^2 - 3x + 2)$.

Siccome $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3x+2} = \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$, il dominio naturale della funzione f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, dove la funzione è infinitamente derivabile.

Limiti, segno e asintoti Osserviamo che

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & &\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \\ &\lim_{x\to 1-} f(x) = +\infty, & &\lim_{x\to 1+} f(x) = -\infty, \\ &\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty, & &\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty\,. \end{aligned}$$

Si noti il grafico di f ha gli asintoti verticali dati dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

Siccome $f(x) = x + 3 + \frac{7x-6}{x^2-3x+2}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{7x-6}{x^2-3x+2}\right|$, abbiamo che la rette $y = -(x + 3)$ è un asintoto per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

Siccome $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, abbiamo che il denominatore è positivo per $x < 1$ e $x > 2$, mentre è negativo per $1 < x < 2$. f ha i seguenti segni su $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$:

$$\overset{-}{(-\infty, 0)}\,,\ \overset{0}{0}\,,\ \overset{+}{(0, 1)}\,,\ \overset{-}{(1, 2)}\,,\ \overset{+}{(2, +\infty)}\ .$$

Derivata prima. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 3x + 2) - x^3(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{x^2(x^2 - 6x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

Abbiamo che $x^2 - 6x + 6$ ha zeri $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$, abbiamo che $x^2 - 6x + 6$ è positivo per $x < 3 - \sqrt{3}$ e $x > 3 + \sqrt{3}$, negativo per $3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$, è nullo per $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Si noti che $1 < 3 - \sqrt{3}$, dato che questo equivale a $\sqrt{3} < 2$ (che è vero, basta elevare al quadrato). Analogamente otteniamo $3 - \sqrt{3} < 2$ e $2 < 3 + \sqrt{3}$.

Mettendo insieme le osservazioni di prima abbiamo che $f'(x)$ ha i seguenti segni:

$$\overset{+}{(-\infty, 0)},\ \overset{0}{0}, \overset{+}{(0, 1)},\ \overset{+}{(1, 3 - \sqrt{3})},\ \overset{0}{3 - \sqrt{3}},\ \overset{-}{(3 - \sqrt{3}, 2)},\ \overset{-}{(2, 3 + \sqrt{3})},\ \overset{0}{3 + \sqrt{3}},\ \overset{+}{(3 + \sqrt{3}, +\infty)}$$

Dove f' ha segno positivo/negativo, la funzione f è strettamente crescente/decrescente. In $3 - \sqrt{3}$ la funzione ha massimo relativo, in $3 + \sqrt{3}$ ha minimo relativo. Si noti che $f'(0) = 0$ quindi in 0 il grafico è tangente all'asse delle x.

Derivata seconda. Siccome $f'(x) = \frac{x^2(x^2-6x+6)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{x^4-6x^3+6x^2}{(x^2-3x+2)^2}$ abbiamo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 18x^2 + 12x)(x^2 - 3x + 2)^2 - 2(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(x^4 - 6x^3 + 6x^2)}{(x^2 - 3x + 2)^4} \\ &= \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 3x + 2)^4} \left[(4x^2 - 18x + 12)(x^2 - 3x + 2) - 2(2x - 3)(x^3 - 6x^2 + 6x)\right]\ . \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$(4x^2 - 18x + 12)(x^2 - 3x + 2) - 2(2x - 3)(x^3 - 6x^2 + 6x) = 14x^2 - 36x + 24,$$

quindi concludiamo che

$$f''(x) = \frac{x(14x^2 - 36x + 24)}{(x^2 - 3x + 2)^3}$$

Siccome il discriminante di $14x^2-36x+24$ è negativo, abbiamo che $14x^2-36x+24>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Inoltre $(x^2-3x+2)^3$ ha lo stesso segno di x^2-3x+2. Alla fine abbiamo che f'' ha i seguenti segni in $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$:

$$\overset{-}{(-\infty,0)}\,,\ \overset{0}{0}\,,\ \overset{+}{(0,1)}\,,\ \overset{-}{(1,2)}\,,\ \overset{+}{(2,+\infty)}$$

Si noti che $f'(0)=0$ quindi abbiamo che f è concava su $(-\infty,0)$, $(1,2)$; mentre è convessa su $(0,1)$, $(2,+\infty)$. Inoltre in 0 c'e' un flesso orizzontale.

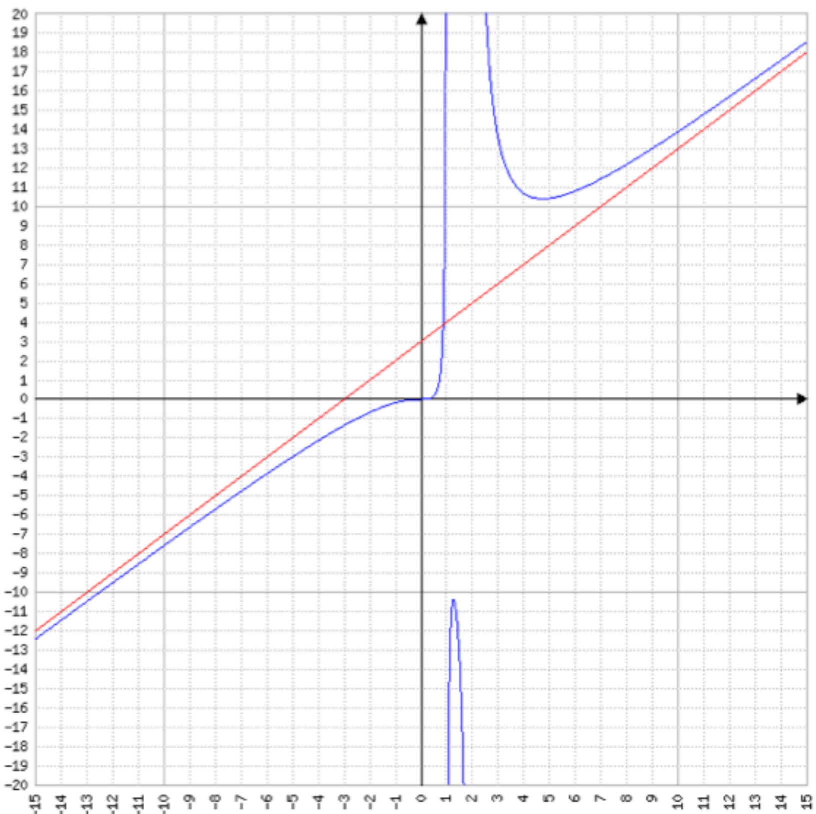

FIGURE 1. Grafico di $f(x)$ con $x\in[-15,15]$. La retta $y=x+3$ è asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$

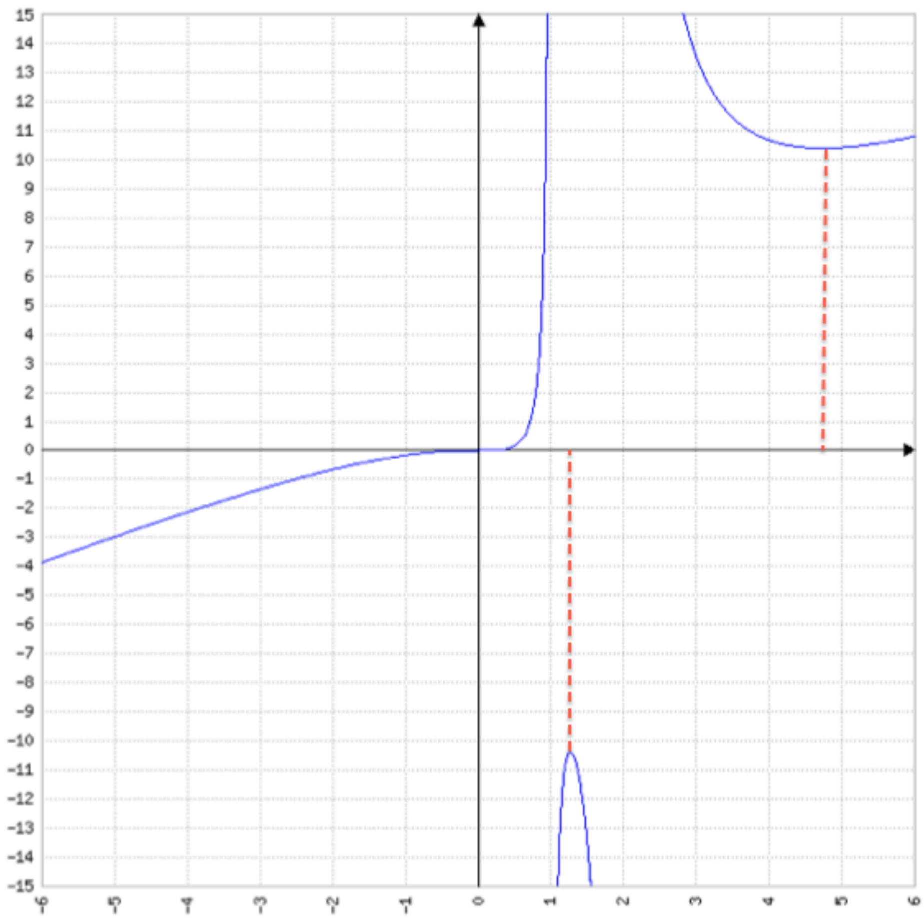

FIGURE 2. Grafico di $f(x)$ con $x \in [-6, 6]$. Il massimo relativo e il minimo relativo associati alle linee tratteggiate sono realizzati in $x = 3 - \sqrt{3}$ e $x = 3 + \sqrt{3}$, rispettivamente

PROBLEMA 2 Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^4+4x^3+8x^2+3x-2}{x^2+4x+8} dx$

Risulta $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x - 2 = x^2(x^2 + 4x + 8) + 3x - 2$, dunque

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx &= \int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx + \int x^2 \, dx \\
&= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 8} \, dx - \int \frac{8}{x^2 + 4x + 8} \, dx + \int x^2 \, dx \\
&= \frac{3}{2} \log(x^2 + 4x + 8) - 4 \arctan(\frac{x}{2} + 1) + \frac{x^3}{3} + C.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 3 Risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(5+8x)^{\beta+1}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(5+8x)^{\beta+1}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(5+8x)^{\beta+1}}dx$$

Il primo integrale a secondo membro è improprio perchè la funzione integranda non è a priori limitata in un intorno destro di 0. Poichè vicino a 0 si ha $\frac{1}{x^\alpha(5+8x)^{\beta+1}} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, l'integrale risulta convergente se $\alpha < 1$. Il secondo integrale è improprio perchè il dominio di integrazione è illimitato. Per $x >> 0$ si ha $\frac{1}{x^\alpha(5+8x)^{\beta+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta+1}}$, pertanto l'integrale converge se $\alpha + \beta + 1 > 1$. In definitiva l'integrale di partenza converge se $\alpha < 1$ e $\beta > -\alpha$.