Prova di *Matematica secondo corso*
Esame del 19-1-2015, proff. Kieran O'Grady e Paolo Papi.

Tempo a disposizione: 2 ore e un quarto; non si possono usare testi, appunti o calcolatrici.

NOME COGNOME MATRICOLA

PRIMA PARTE

E' necessario risolvere correttamente almeno quattro esercizi. Ogni esercizio della prima parte vale due punti.

QUESITO 1. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-12|^{n+1}}{2n^2 e^{-n}}$. Vale la seguente proprietà:

☐ La serie converge per ogni x.
☐ La serie converge per ogni $x \in [12 - 1/e, 12 + 1/e]$.
☐ La serie converge solo se $x \in (12 - 1/e, 12 + 1/e)$

QUESITO 2. Si consideri il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log n(1 - \cos(1/n))}$. Vale la seguente proprietà:

☐ Il limite non esiste.
☐ Il limite vale $+\infty$.
☐ Il limite vale 0.

QUESITO 3. Calcolare l'integrale $\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx$.

Indicare solo il risultato finale:...

QUESITO 4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = (2x)^{(3x)}$ definita per $x > 0$.

Indicare solo lil risultato finale:...

QUESITO 5. Si consideri l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx$. Vale la seguente affermazione

☐ L'integrale è improprio e converge.
☐ L'integrale è improprio e diverge.
☐ L'integrale non è improprio.

QUESITO 6. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + y = 0$.

Indicare solo il risultato finale:...

SECONDA PARTE

Risolvere i problemi che seguono e rispondere alla domanda teorica, riportando lo svolgimento nella parte bianca del foglio (eventualmente usare il retro del foglio).

PROBLEMA 1(8 punti) Studiare il grafico della funzione $f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$, determinando il dominio naturale di f, gli insiemi di continuità e derivabilità, gli eventuali asintoti e punti di massimo e minimo relativo. Tracciare poi un grafico approssimativo.

PROBLEMA 2 (6 punti)

(1) Determinare tutte le primitive della funzione $f(x) = -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)$.

(2) Calcolare $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t(t-1)^2}\,dt$.

QUESITO TEORICO (6 punti)

(1) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a, b). Dimostrare che $f'(x) \leqslant 0 \, \forall \, x \in (a, b)$ se e solo se f è decrescente in $[a, b]$. Discutere l'enunciato: $f'(x) < 0 \, \forall \, x \in (a, b)$ se e solo se f è strettamente decrescente in $[a, b]$.

(2) Dare un esempio di serie convergente, di serie divergente, di serie indeterminata, di serie convergente non assolutamente convergente.