Prova di *Matematica secondo corso*
Esame del 16-2-2015, proff. Kieran O'Grady e Paolo Papi.

Tempo a disposizione: 2 ore e mezzo; non si possono usare testi, appunti o calcolatrici.

NOME COGNOME MATRICOLA

PRIMA PARTE

E' necessario risolvere correttamente almeno quattro esercizi. Ogni esercizio della prima parte vale due punti.

QUESITO 1. Si consideri l'insieme $A = \left\{ \frac{2n+3}{7-5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Vale la seguente proprietà:

☐ A è chiuso.
☐ A è illimitato.
☐ $-2/5$ è un punto di accumulazione per A.

QUESITO 2. Si consideri il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^{\cos x} - 9}{x^2}$. Vale la seguente proprietà:

☐ Il limite non esiste.
☐ Il limite vale $\frac{9}{2} \log(9)$.
☐ Nessuna delle due precedenti risposte è corretta.

QUESITO 3. Calcolare il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \sin x - \cos x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$.

Indicare solo il risultato finale:..

QUESITO 4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_1^2 (1 + 2\log(x))x\,dx$.

Indicare solo il risultato finale:..

QUESITO 5. Si consideri l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx$. Vale la seguente affermazione

☐ L'integrale è improprio e converge.
☐ L'integrale è improprio e diverge.
☐ L'integrale non è improprio.

QUESITO 6. Discutere la convergenza delle seguenti serie: $a) \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$, $b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n+4}{n^{7/2}+n^2+23}$

Indicare solo il risultato finale:..

SECONDA PARTE

Risolvere i problemi che seguono e rispondere alla domanda teorica, riportando lo svolgimento nella parte bianca del foglio (eventualmente usare il retro del foglio).

PROBLEMA 1(8 punti) Studiare il grafico della funzione $f(x) = (2x^2 - x + 1)e^x$, determinando il dominio naturale di f, gli insiemi di continuità e derivabilità, gli eventuali asintoti e punti di massimo e minimo relativo. Studiare la concavità e la convessità. Tracciare infine un grafico approssimativo.

PROBLEMA 2 (6 punti) Calcolare la primitiva $F(x)$ che si annulla in $x = 0$ della funzione (dipendente dal parametro reale k) $f(x) = \dfrac{3 - kx + x^3}{4 - x^2}$.

Determinare, se possibile, k in modo tale che $F(x)$ abbia un minimo relativo per $x = -1$.

QUESITO TEORICO (6 punti)

(1) Enunciare e dimostrare il teorema di L'Hopital supponendo le funzioni di classe C^1.
(2) Enunciare il criterio di Leibnitz per le serie di segno alterno.