1. Sia $G = (\mathbb{U}(\mathbb{Z}_{21}), \cdot)$ il gruppo degli invertibili del gruppo $(\mathbb{Z}_{21}, +)$.

   (a) Determinare l'ordine di tutti gli elementi di G. Verificare che G non è ciclico.

   (b) Costruire tutti i sottogruppi di G.

   (c) (facoltativo) Determinare un isomorfismo fra un opportuno sottogruppo di G e il gruppo $(\mathbb{Z}_6, +)$ giustificando i criteri con i quali l'isomorfismo stesso è stato costruito.

2. Considerato il gruppo S_8 delle permutazioni su otto elementi e A_8 il suo sottogruppo alterno; si chiede di:

   (a) Determinare tutte le possibili strutture cicliche degli elementi di S_8 e, per ogni struttura ciclica, l'ordine di un elemento con quella struttura ciclica.

   (b) (facoltativo) dire se esistono sottogruppi H, K, L di ordine quattro tali che:

      i. $H \subset A_8$;

      ii. $K \not\subset A_8$;

      iii. $L \cap A_8 = \emptyset$.

      Nel caso di esistenza fornirne un esempio.

   (c) Trovare, se possibile, in S_8 due sottogruppi R e T di ordine sei, non isomorfi tra loro.

3. Nello spazio vettoriale V delle matrici reali quadrate 2×2 si consideri l'endomorfismo $F(X) = AX - XA$ ove $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determini la matrice A di F rispetto alla base

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   di V.

   (b) Si determini una base di $Ker(F)$.

   (c) Verificare che il polinomio caratteristico di F è $x^2(x^2-5)$. Studiare la diagonalizzabilità di F.

4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 si consideri l'endomorfismo

$$D(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3) = a_0 + a_1 + (a_1 + a_2)t + (a_2 + a_3)t^2 + (a_3 + a_0)t^3$$

   (a) Si determini la matrice A di D rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di V.

   (b) Si determinino basi per $Ker(D)$, $Im(D)$.

   (c) Dimostrare che $V = Ker(D) + Im(D)$.