1. Si consideri l'insieme $H = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} ; \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{Z}_2 : \overline{a} \cdot \overline{d} - \overline{c} \cdot \overline{b} \neq 0 \right\}.$

   (a) Si verifichi che H è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne;

   (b) si dica se esso è isomorfo a qualche gruppo ben noto.

   (c) Si determinino i sottogruppi e gli eventuali sottogruppi normali non banali di H.

2. Si consideri la seguente applicazione:

$$\begin{array}{rcccc} \alpha_\sigma & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{S}_6 \\ & & n & \longrightarrow & \sigma^n \end{array}$$

dove σ è un elemento fissato in $\mathcal{S}_6$; si chiede di:

(a) verificare che α_σ è un omomorfismo qualunque sia σ;

(b) determinare se possibile due elementi $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_6$ tali che

$$Ker\alpha_{\sigma_1} = 4\mathbb{Z} \text{ e } Ker\alpha_{\sigma_2} = 7\mathbb{Z};$$

(c) determinare la struttura ciclica degli elementi σ tali che $Im\alpha_\sigma < \mathcal{A}_6$ (il sottogruppo alterno).

3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato dai vettori

$$u_1 = (1, -1, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, 0, 1),\ u_3 = (0, -1, 1, -1),\ u_4 = (-2, 2, -2, 0)$$

e i sottospazio W definito al modo seguente:

$$W = \{(a, b, c, d) : 2a + b + c = 0, a + 2b - c - 3d = 0, a + b - d = 0\}.$$

Si chiede di:

(a) determinare una base B_U per U e una base B_W per W;
(b) determinare una base per lo spazio intersezione $U \cap W$;
(c) determinare una base per lo spazio unione $U \cup W$ (si ricordi che $U \cup W$ è il sottospazio generato da U e W).

4. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita sulla base canonica $B = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad f(e_3) = 2e_3.$$

   (a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base B presa come base di partenza e di arrivo in $\mathbb{R}^3$.
   (b) Si verifichi se f è o meno un isomorfismo.
   (c) Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice A e si verifichi se tale matrice è diagonalizzabile.