Facolt di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica

Proff. E. Casadio Tarabusi, K. O'Grady e P. Papi

Prova di *Matematica secondo corso* del 15 Giugno 2015

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	5	
2	5	
3	6	
4	5	
5	6	
6	5	
Totale	32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Non si possono usare testi, appunti, calcolatrici. Se necessario usare il resto del foglio.*

Voto/30:

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti successioni dire (motivando la risposta) se è convergente, divergente o indeterminata, e se è convergente determinarne il limite:

$$a_n = (-1)^n \cos\frac{1}{n}, \qquad b_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

Risoluzione:

La successione a_n è indeterminata: risultando $|a_n| \le 1 \,\forall\, n$ non può divergere, né convergere ad a, $|a| > 1$. Non può convergere a 1 (risp. -1) perchè l'intorno di centro 1 (risp. -1) e raggio 1/2 non contiene nessun termine di indice dispari (risp. pari) della successione. Infine non può convergere ad a, $-1 \le a \le 1$ perché $\cos\frac{1}{n} \to 1$, dunque l'intorno di centro a e raggio $\min\{\frac{a+1}{2}, \frac{1-a}{2}\}$ non contiene definitivamente nessun termine della successione.

Un altro modo di vedere che la successione non può convergere ad un limite finito è osservare che le sottosuccessioni a_{2n}, a_{2n+1} coverfono a 1, -1, rispettivamente.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Determinate per quali valori reali di a, l'equazione

$$e^x = x + a$$

ha (almeno) una soluzione x.

Risoluzione:

Le soluzioni dell'equazione corrispondono alle intersezioni con l'asse x del grafico della funzione $f(x) = e^x - x - a$. Tale funzione è continua e ha minimo assoluto in 0 (come mostra l'analisi di $f'(x) = e^x - 1$ e il fatto che $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$), e tale minimo vale $f(0) = 1 - a$. Pertanto l'equazione ha soluzione se e solo se $f(0) \le 0$, ovvero $a \ge 1$. (Più in dettaglio, se $f(0) > 0$, ovvero $a < 1$, l'equazione non ha soluzione, se $a = 1$, $x = 0$ è soluzione. Se $a > 1$, tenendo conto che $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ troviamo $x_1 < 0 < x_2$ tali che $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$. Applicando il esistenza degli zeri alla funzione continua f negli intervalli $[x_1, 0], [0, x_2]$ troviamo due zeri di f).

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \log|x| - x^2 + x + \frac{3}{4}.$$

(3a) Determinate $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

(3b) Determinate il dominio di definizione di $f(x)$.

(3c) Determinate gli asintoti verticali del grafico di $f(x)$.

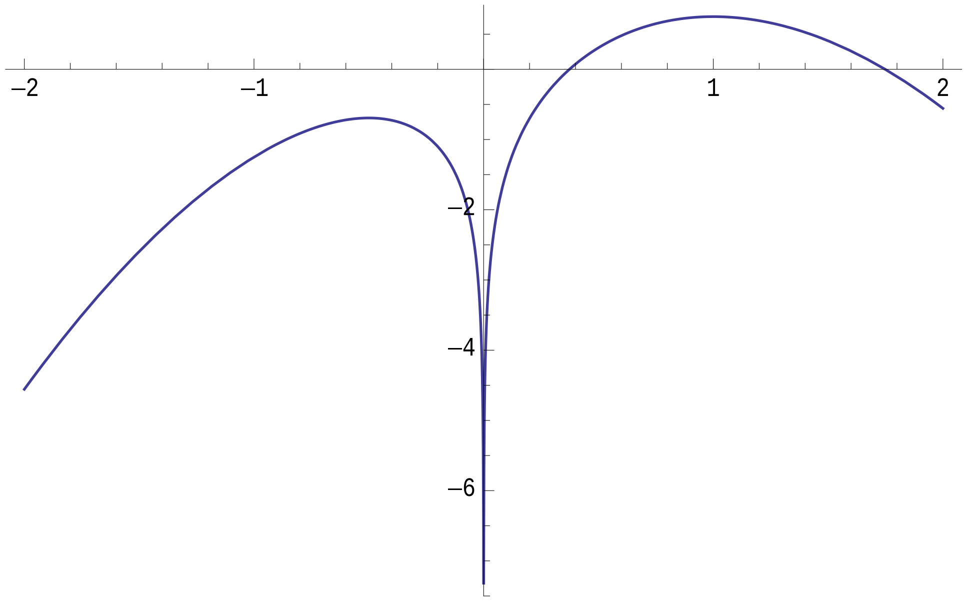
(3d) Determinate punti di max/min di $f(x)$, e gli intervalli su cui $f(x)$ è crescente/decrescente.

(3e) Disegnate il grafico di $f(x)$.

Risoluzione:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (domina il termine $-x^2$).
- f è definita se $x \ne 0$ (esistenza del logaritmo).
- L'asse y è asintoto verticale, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
- Risulta $f'(x) = 1/x - 2x + 1$; la derivata si annulla in $x = -1/2$ e $x = 1$. L'analisi del segno ci dice che tali punti sono entrambi punti di massimo relativo; $f(x)$ è crescente in $(-\infty, -1/2] \cup (0, 1]$ e decrescente in $[-1/2, 0) \cup [1, +\infty)$.

(Debug) Out[3]=



Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx, \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}.$$

Risoluzione: Effettuiamo la sostituzione $\sin x = t$: si ha

$$\int_0^{\pi/4} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t^3 dt = \frac{t^4}{4}|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{16}$$

Per il secondo integrale, decomponiamo l'integrando in somma:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})dx = \frac{1}{2}(-\log(1-x) + \log(1+x))|_{-1/2}^{1/2} = \log(3)$$

Esercizio 5. Determinate quali delle seguenti serie sono convergenti, divergenti, o indeterminate:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+5}{n^2+3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}.$$

Risoluzione: Risulta

$$|\frac{\sin n}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3},$$

dunque per il criterio del confronto con la serie armonica generalizzata di esponente 3, la serie data converge assolutamente, quindi converge.

La seconda serie è a termini positivi; poiché

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{n+5}{n^2+3n+1} = 1$$

il criterio dell'infinitesimo con $p = 1$ permette di dedurre che la serie diverge.

La seconda serie è a termini positivi; usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^n}{3^n\cdot n!}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1$$

Pertanto la serie converge.

Esercizio 6. Si risolva il problema di Cauchy

$$y' = \cos x - \frac{y}{x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Risoluzione:

Ricordiamo che l'integrale generale di $y' = a(x)y + b(x)$ è $y(x) = e^{-A(x)} \int e^{-A(x)} b(x) dx$ ove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Nel nostro caso $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $b(x) = \cos x$, per cui $A(x) = -\log|x|$ e

$$\int x \cos x dx = \cos(x) + x \sin(x) + c$$

Pertanto l'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x}(\cos(x) + x \sin(x) + c)$ e la condizione iniziale implica $c = 1$, dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{x}(\cos(x) + x \sin(x) + 1).$$