CORSO DI ALGEBRA

A.A. 2002/2003

Prof. Paolo Papi

ESERCIZI PROPOSTI

Geometria e sistemi lineari

1 Determinare la retta passante per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2 Determinare il piano passante per il punti $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3 Determinare il piano passante per $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e contenente la retta di direzione $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4 Determinare il piano parallelo a quello dell'esercizio 2 passante per $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

5 Determinare le posizioni reciproche delle seguenti rette

$$r_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad r_4 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5 Determinare equazioni cartesiane per le rette dell'esercizio precedente e per i piani degli esercizi 2,3,4.

6 Determinare il piano passante per i punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ e ortogonale alla retta $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

7 Determinare la retta passante per i punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$, ortogonale al piano $x_1 + x_2 + x_3 = -1111$.

8 Si considerino i punti A, B, C di coordinate rispettive $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determinare equazioni vettoriali e cartesiane per la retta r passante per A e B.

(b) Determinare equazioni cartesiane e vettoriali per il piano π passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e parallelo al piano passate per A, B, C.

(c) Sia $D = A - B$. Determinare la retta r' perpendicolare a π e passante per D.

(d) Determinare la retta r'' complanare con r, r' e passante per il punto $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(e) Determinare il punto di intersezione P tra r'' e il piano di equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

9 Si considerino i punti A, B di coordinate rispettive $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sia r la retta passante per A, B ed sia s la retta di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$.

(a) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(b). Determinare un'equazione cartesiana per il piano π passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e parallelo ad r, s.

10 Sia P il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e sia s la retta passante per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Determinare un'equazione cartesiana per il piano ortogonale ad s e passante per P.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per P perpendicolare ed incidente ad s.

(c) Verificare che la retta s è parallela al piano π di equazione $x_1 + x_3 = 0$;

11 Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r_2 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r_1, r_2.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta s complanare con r_1, complanare con r_2 e passante per $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

12 Si considerino le retta r, s di equazioni cartesiane

$$r: \begin{cases} x_1 - x_3 + 1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2 = 0 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Verificare che r ed s sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per la retta t passante per il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, perpendicolare ad r e incidente s.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana per il piano π contenente t ed s.

13 Si considerino le retta r, s di equazioni

$$r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0 \end{cases}, \qquad s: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(b) Determinare equazioni cartesiane per il piano π passante per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e parallelo al piano per r ed s.

14 Si determinino equazioni cartesiane per la retta s passante per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, perpendicolare alla retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ e parallela al piano di equazione $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$.

(b) Si dica se r e s sono sghembe o complanari.

15 Determinare un'equazione cartesiana per il piano π contenente la retta r di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{cases}$ e passante per il punto $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) Determinare equazioni vettoriali per la retta s passante per il punto $Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e ortogonale a π.

(c) Determinare la posizione reciproca delle rette r ed s.

16-21 Per ciascuno dei seguenti sistemi lineari:

(1) determinare la compatibilità e, eventualmente, il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni;

(2) risolvere il sistema.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 2 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

22-23 Per ciascuno dei seguenti sistemi parametrici si studi al variare di $k \in \mathbb{R}$ la compatibilità e il numero di parametri da cui dipendono le soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + x_3 = 6 \\ kx_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2k \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 10 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + kx_4 = 1 \end{cases}$$