Esercizio 1 a) Si ricordi la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di n equazioni in m incognite ammetta soluzione.

b) Sia $W = \left\{ X \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases} \right\}$.

Determinare una base $\mathcal{B}$ di W giustificando quanto fatto.

c) Completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 2 a) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 3×3. Dopo aver ricordato cosa si intende per base di uno spazio vettoriale si determini una base di V.
b) Si ricordi poi la definizione di vettori linearmente indipendenti e di vettori linearmente dipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione finita.
c) Sia W il sottospazio di V generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e sia $U = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0\}$. Si verifichi se i vettori che generano W sono o meno linearmente indipendenti e si determini una base per ciascuno dei sottospazi U, W e $U + W$.

Esercizio 3 a) Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare $L_A(X) = AX$ associata, relativamente alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Dire se la trasformazione lineare L_A è invertibile giustificando quanto si afferma.
b) Ricordare quale sia la condizione per cui un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ sia un autovettore relativo ad un autovalore $\tilde{\lambda}$ di L_A e come si determinano tutti gli autovalori di L_A.
c) Dopo aver ricordato le condizioni per la diagonalizzabilità di una trasformazione lineare $F : V \to V$ (V spazio vettoriale di dimensione finita), dire se L_A è diagonalizzabile.

Esercizio 4 a) Verificare che $O(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.

b) Provare che se $A \in O(n)$ allora $\det(A) = \pm 1$.

c) Provare che $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ è un sottogruppo normale di $O(n)$.