Esercizio 1 (a) Determinare il numero di classi (moltiplicativamente) invertibili in $\mathbb{Z}_{4725}$. Si considerino le classi $\overline{1555}, \overline{4096} \in \mathbb{Z}_{4725}$. Dire quali delle due classi è invertibile e trovare esplicitamente l'inversa.

(b) Dimostrare che il gruppo $\mathbb{U}_{27}$ degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{27}$ è ciclico. Determinare il reticolo dei sottogruppi .

(c) Determinare la permutazione $\gamma \in S_8$ tale che $\alpha^2\gamma^2 = \beta\gamma$ ove

$$\alpha = (1,4,5,7)(3,4,6,8), \quad \beta = (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)(6,7)(7,8).$$

Determinare ordine e parità di γ.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Determinare basi per V e W.

(b) Determinare basi per $V + W$, $V \cap W$.

Esercizio 3. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2. Sia $F : V \to V$ l'applicazione lineare

$$F(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a+6b+18c & -10b-36c \\ -10b-36c & 3b+11c \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di V.

(b) Discutere la diagonalizzabilità di F.

Esercizio 4.

(a) Definire le nozioni di autovettore ed autovalore per un operatore lineare F su uno spazio vettoriale V di dimensione finita.

(b) Enunciare condizioni necessarie e sufficienti affinchè un operatore lineare F su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su $\mathbb{R}$ sia diagonalizzabile.

(c) Sia G un gruppo e g un elemento di G. Definire l'ordine $o(g)$ di g.

(d) Quanti sottogruppi propri ha $(\mathbb{Z}_{1001}, +)$?.

(e) Enunciare il teorema di Lagrange.

(f) Esibire, se esiste, una permutazione pari di ordine 12 nel gruppo simmetrico S_9.