**Esercizio 1** Si scriva la condizione necessaria e sufficiente affinché la classe $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{35}$ appartenga al gruppo $G = (\mathbb{U}_{35}, \cdot)$ e si dica quanti elementi ha il gruppo $G$.

Verificato poi che $\overline{2} \in \mathbb{U}_{35}$ si costruisca il minimo sottogruppo (ciclico) contenente $\overline{2}$, ovvero $S =< \overline{2} >$. Si chiede di:

a) Determinare l'ordine di tutti gli elementi di $S$,
b) Costruire un sottogruppo $T$ di $S$ che possieda 4 elementi,
c) Determinare la partizione in classi laterali di $T$ in $S$,
d) verificare se $T$ è normale in $S$.

**Esercizio 2** Nel gruppo simmetrico $S_8$ si considerino le permutazioni seguenti

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \beta = (1,2,3)(1,2,3)(4,5,6)(6,7,8).$$

a) Determinare l'ordine e la parità di $\alpha$ e $\beta$.
b) Determinare $\gamma \in S_8$ tale che $\alpha^2\gamma = \beta^3$.
c) Determinare $\gamma^{831}$ e trovarne ordine e parità .

**Esercizio 3** Denotiamo con $[h]_r$ la classe di $h \in \mathbb{Z}$ modulo $r$.
a) Si dica in quali casi ponendo

$$f([n]_6) = [4n]_9, \qquad g([n]_6) = [6n]_9$$

$f, g$ definiscono applicazioni $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$.
b) Determinare gli interi $k$ per cui $f_k([n]_6) = [kn]_9$ è un un omomorfismo di gruppi $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_9$.
c) Per tali valori di $k$ determinare il nucleo di $f_k$.
d) Provare, senza effettuare calcoli espliciti, che tutti gli $f_k$ che sono omomorfismi non nulli hanno la stessa immagine.

**Esercizio 4**

a) Dare la definizione di gruppo ciclico,
b) dare la definizione di ordine di un elemento $g$ di un gruppo $(G, \cdot)$,
c) dare la definizione di sottogruppo normale,
d) calcolare il numero di generatori del gruppo $(\mathbb{Z}_{810}, +)$,
e) enunciare il teorema di Lagrange.